(16)

POLIEDROS REGULARES
Y ARQUIMEDIANOS

Láminas 1 al 25

Lámina 1

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

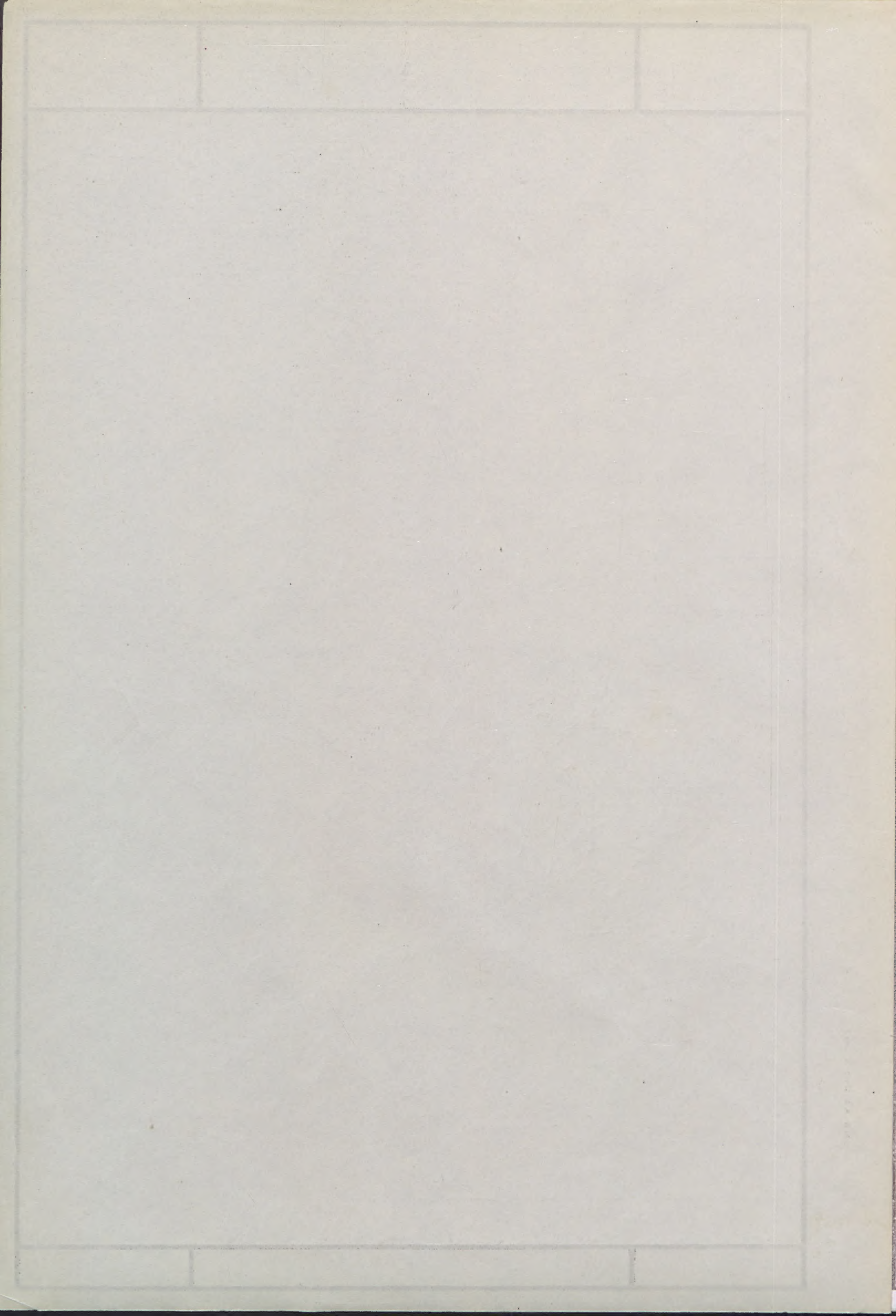
Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

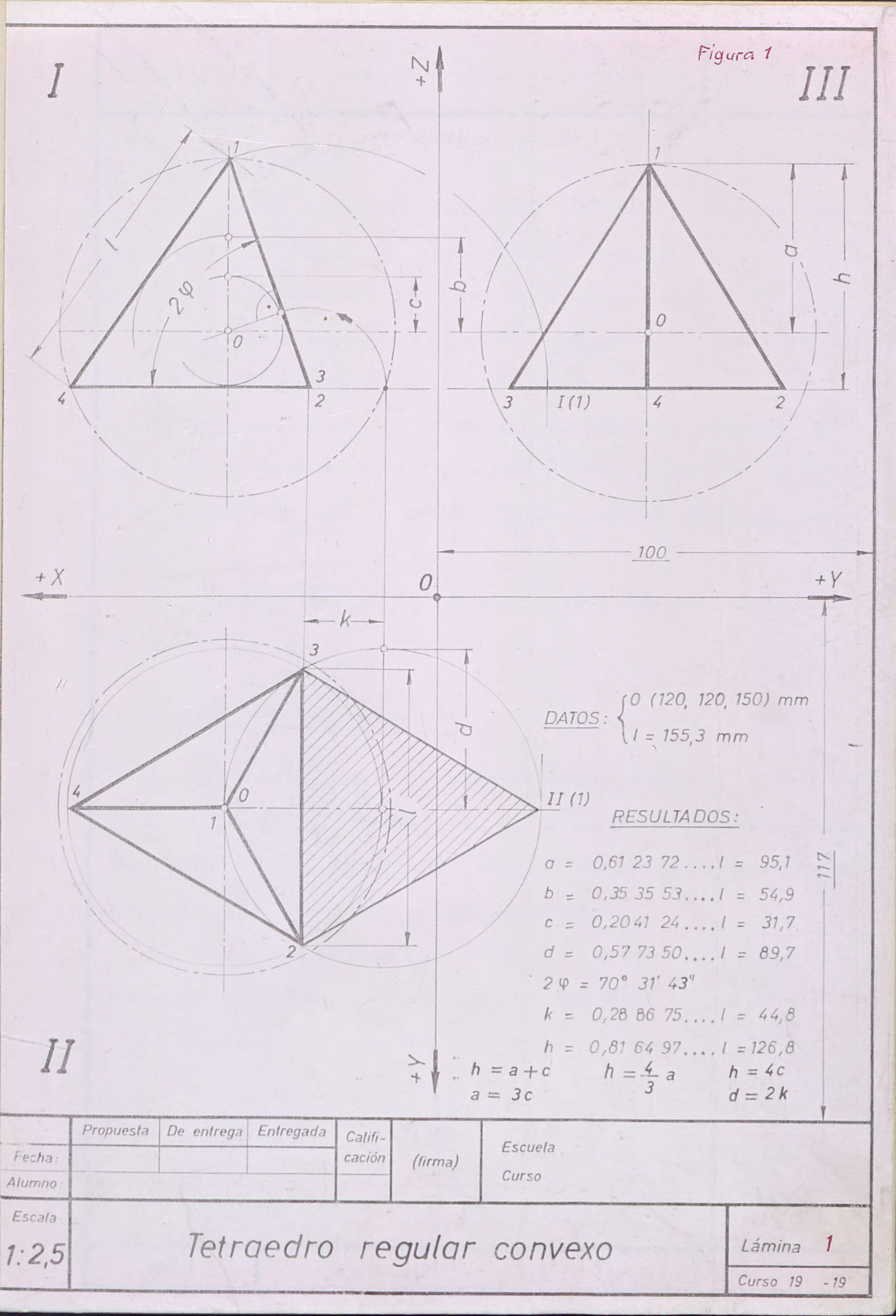
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_4 = 89,8 mm

UNE A4 210 X 297





	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

Escala		
1:2,5	Tetraedro regular convexo	Lámina 1
		Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Gráficamente se resuelve este ejercicio situando el tetraedro con una cara paralela a II y la contigua perpendicular a I. Los vértices se numerarán del 1 al 4.

La proyección sobre II (figura 1) es directa y nos da rápidamente las de los cuatro vértices.

La proyección sobre I se obtiene seguidamente colocando la cara 2·3·4 paralela a II y mediante giro de la cara contigua 1·2·3, alrededor de la arista 2·3, se obtiene el cuarto vértice nº 1.

La proyección sobre III se deduce de las obtenidas anteriormente sobre I y II.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los inevitables errores gráficos, y facilitar al mismo tiempo el trazado, con su continua comprobación, deberán calcularse previamente las magnitudes acotadas en la figura 1, según la tabla correspondiente.

La longitud del lado se ha fijado de forma que el radio $\underline{a_4}$ de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm.

La dimensión de $\underline{l_4}$ con seis decimales, será

$$l_4 = \frac{55}{0,612372..} \cong 89,814688... \text{ mm}$$

con cuyo valor, como base de cálculo, obtenemos:

$a_4 = 0{,}61\ 23\ 72 \times 89{,}81\ 46\ 88 = 55{,}0$ mm

$b_4 = 0{,}35\ 35\ 53 \times$ id $= 31{,}8$ "

$c_4 = 0{,}20\ 41\ 24 \times$ id $= 18{,}3$ "

$d_4 = 0{,}57\ 73\ 50 \times$ id $= 51{,}8$ "

$2\varphi_4 = 70°\ 31'\ 43{,}6''$

$k_4 = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id $= 25{,}9$ "

$h_4 = 0{,}81\ 64\ 97 \times$ id $= 73{,}3$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$h_4 = a_4 + c_4 = 55{,}0 + 18{,}3 = 73{,}3$ mm $\quad h_4 = \frac{4}{3} a_4 = \frac{4}{3} \times 55 = 73{,}3$ mm

$h_4 = 4 c_4 = 4 \times 18{,}3 = 73{,}2$ mm $\quad a = 3c = 3 \times 18{,}3 = 54{,}9$ mm

$d_4 = 2 k_4 = 2 \times 25{,}9 = 51{,}8$ mm

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de 89.8 mm. de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

A) Nomenclatura empleada $\quad l_4$ = Lado del tetraedro (dato).

a_4 = Radio de la esfera circunscrita al tetraedro.

b_4 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_4 = Radio de la esfera inscrita

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k_4 = Apotema del polígono de una cara.

h_4 = Altura del tetraedro.

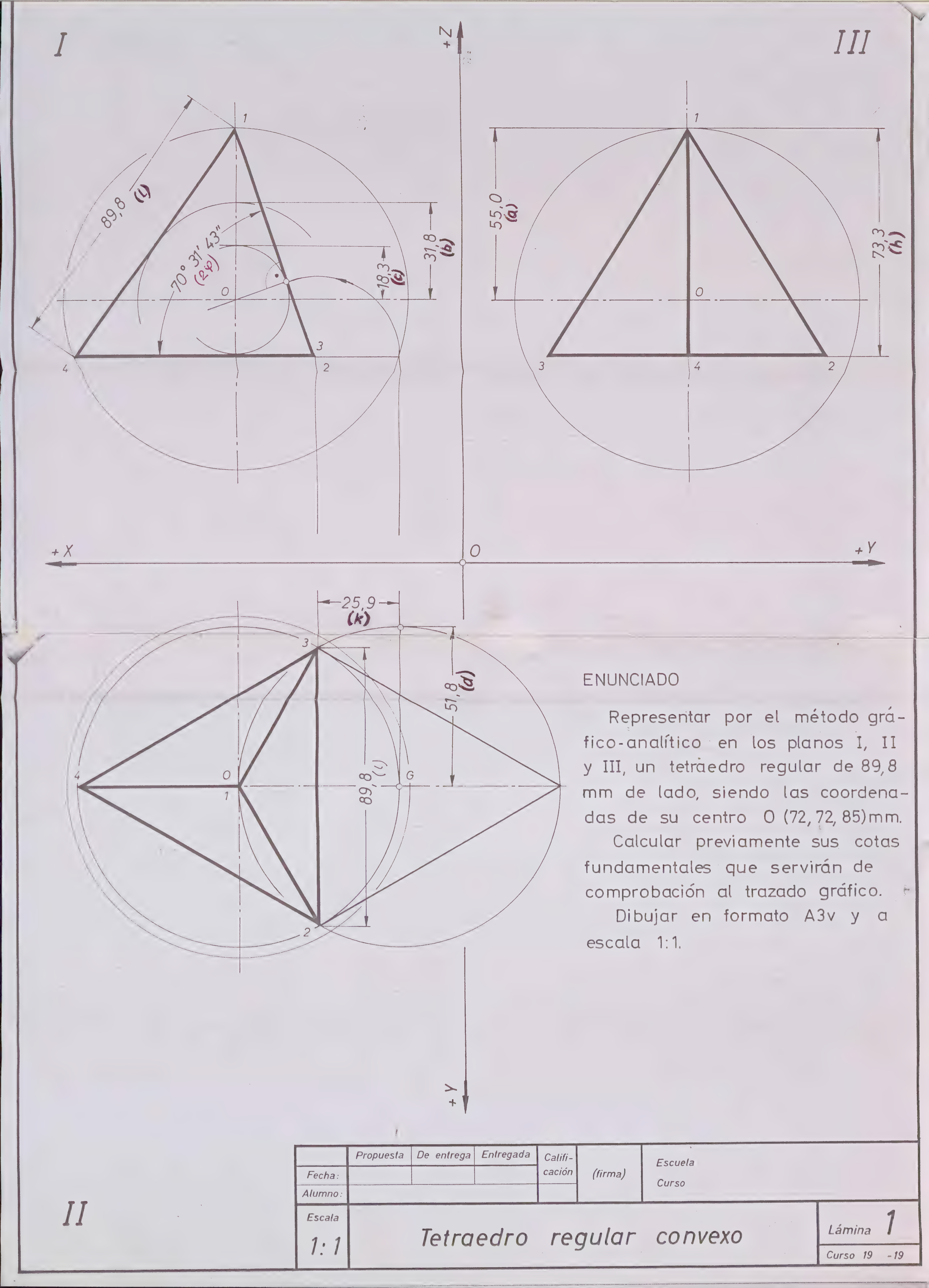
S_4 = Superficie.

V_4 = Volumen.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_4	(1) $\frac{\sqrt{6}}{4}\,\ell_4$	$0{,}61\;23\;72\ldots\;\ell_4$
b_4	(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\,\ell_4$	$0{,}35\;35\;53\ldots\;\ell_4$
c_4	(3) $\frac{\sqrt{6}}{12}\,\ell_4$	$0{,}20\;41\;24\ldots\;\ell_4$
d_4	(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}\,\ell_4$	$0{,}57\;73\;50\ldots\;\ell_4$
2φ	(5) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0{,}57\;73\;50\ldots$ $2\varphi = 70°\;31'\;43{,}6''$
k_4	(6) $\frac{\sqrt{3}}{6}\,\ell_4$	$0{,}28\;86\;75\ldots\;\ell_4$
h_4	(7) $\frac{\sqrt{6}}{3}\,\ell_4$	$0{,}81\;64\;97\ldots\;\ell_4$
S_4	(8) $\sqrt{3}\;\ell_4^2$	$1{,}73\;20\;51\ldots\;\ell_4^2$
V_4	(9) $\frac{\sqrt{2}}{12}\,\ell_4^3$	$0{,}11\;78\;51\ldots\;\ell_4^3$
(10) Relaciones entre magnitudes		
$h_4 = a_4 + c_4$	$h_4 = \frac{4}{3}a_4$	$h_4 = 4c_4$
$a_4 = 3c_4$		$d_4 = 2k_4$

UNE A4 210 X 297



ENUNCIADO

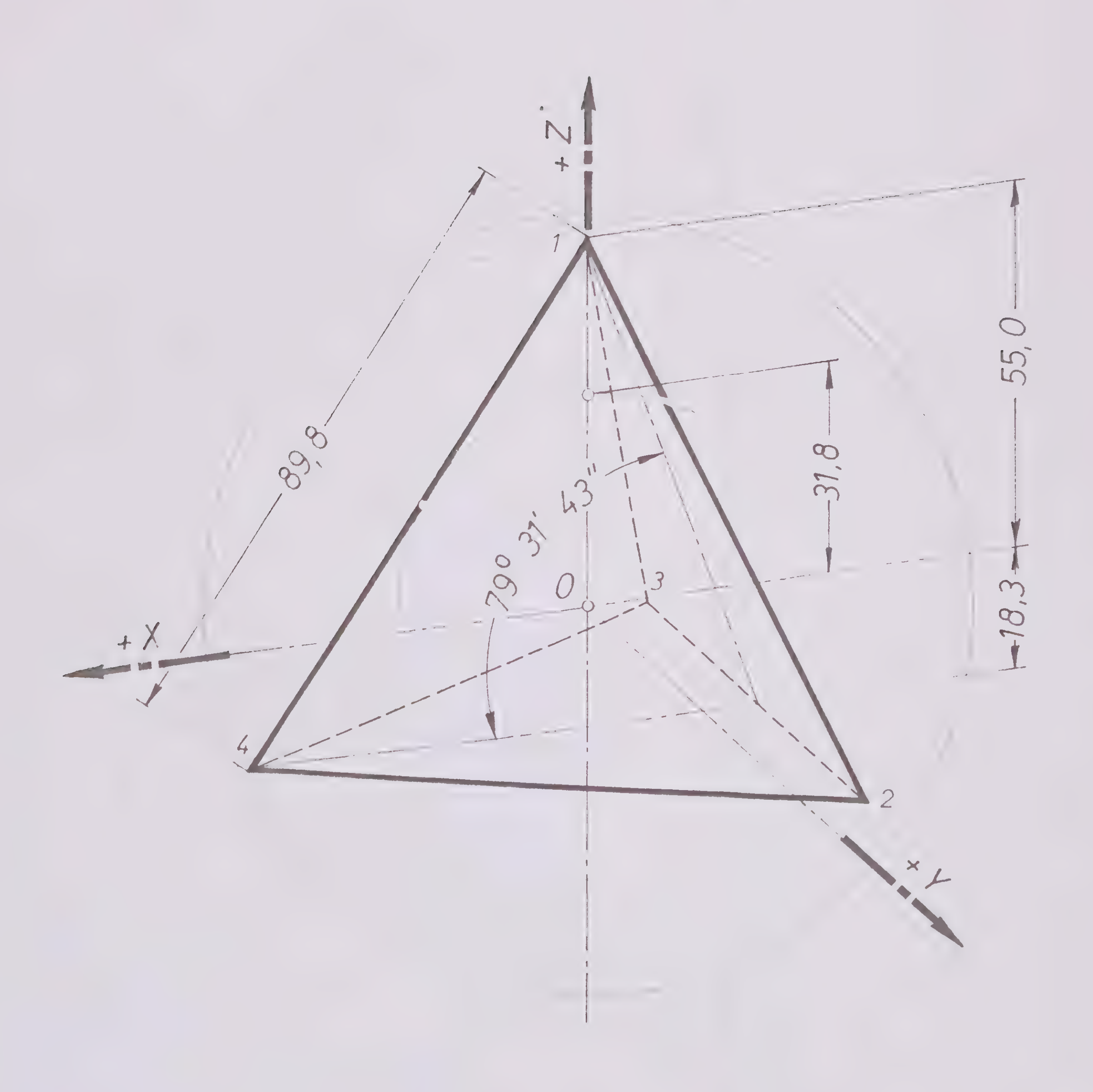
Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Tetraedro regular convexo	Lámina 1 Curso 19 -19



Tetraedro regular convexo

Lámina 2

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un exaedro regulare de 63.5 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3 V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

$l_6 = 63.5$ mm



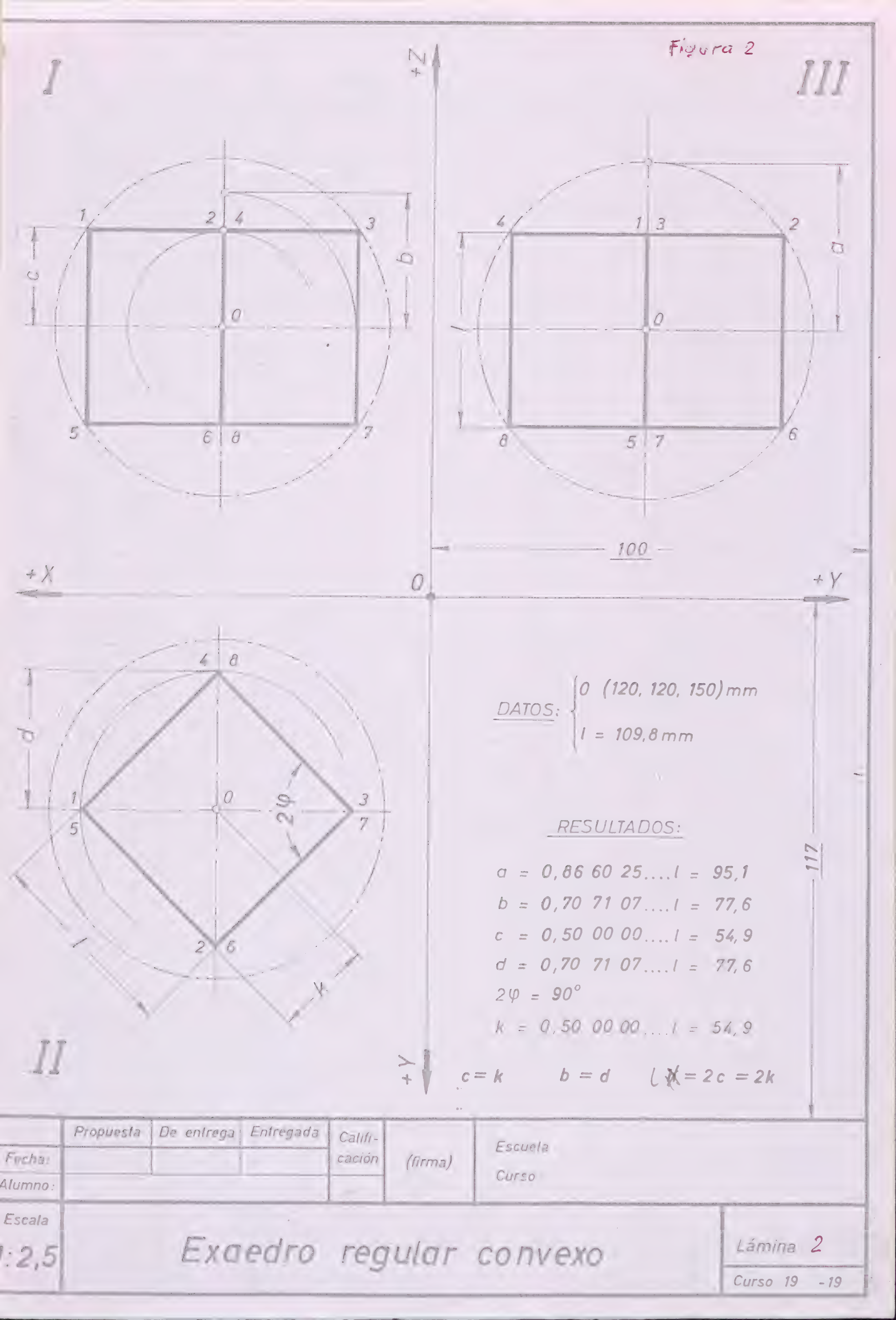


Figura 2
I
III
II
+Z
+X
+Y
O
100
117
1 2 4 3
5 6 8 7
4 1 3 2
8 5 7 6
4 8
1 5
3 7
2 6
0
a
b
c
d
l
k
2φ
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 109,8 mm
RESULTADOS:
a = 0,86 60 25....l = 95,1
b = 0,70 71 07....l = 77,6
c = 0,50 00 00....l = 54,9
d = 0,70 71 07....l = 77,6
2φ = 90°
k = 0,50 00 00....l = 54,9
c = k b = d l = 2c = 2k
Propuesta
De entrega
Entregada
Calificación
(firma)
Fecha:
Alumno:
Escuela
Curso
Escala
1:2,5
Exaedro regular convexo
Lámina 2
Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Gráficamente se resuelve este ejercicio situando el hexaedro con una cara paralela a II, y al mismo tiempo una diagonal de dicha cara paralela al eje +X. Los vértices se numerarán del 1 al 8.

La proyección sobre II (figura 2) es inmediata y nos da rápidamente las de los ocho vértices.

Las sencillas proyecciones sobre I y III, iguales entre sí y de altura l, nos dan las de sus ocho vértices en cada una de ellas.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

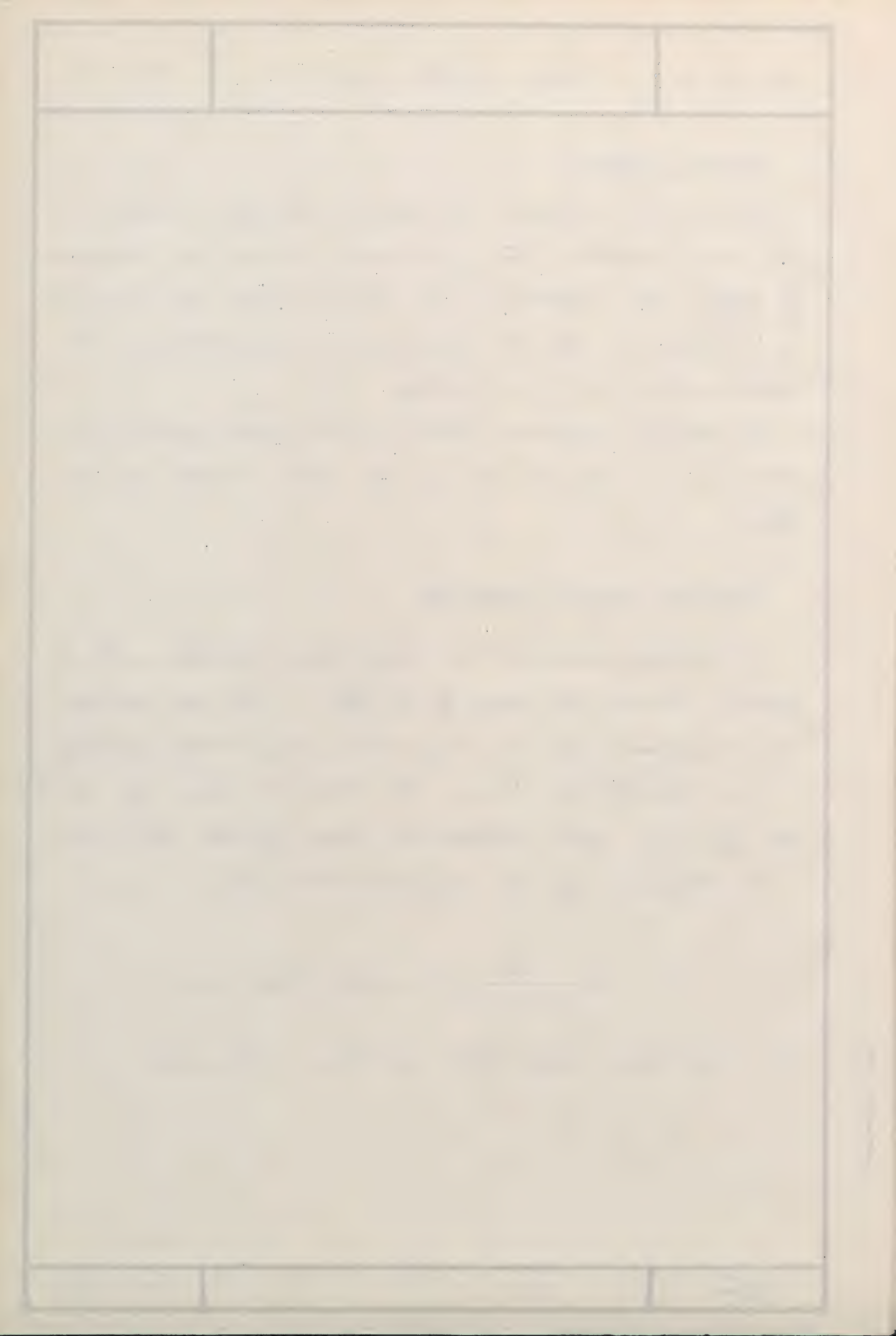
Se calcularán previamente las magnitudes acotadas en la figura 2, tomando los valores de la tabla. Ellas nos servirán para comprobación de las correspondientes magnitudes gráficas.

La longitud del lado se ha fijado de forma que el radio $\underline{a_6}$ de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm.

La dimensión $\underline{l_6}$, con seis decimales, será:

$$l_6 = \frac{55}{0{,}86\ 60\ 25\ldots} = 63{,}50\ 85\ 60 \text{ mm}$$

con cuyo valor, como base de cálculo, obtenemos:



$a_6 = 0,86\ 60\ 25 \times 63,50\ 85\ 60 = 55,0$ mm

$b_6 = 0,70\ 71\ 07 \times$ id. $= 44,9$ "

$c_6 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id. $= 31,8$ "

$d_6 = 0,70\ 71\ 07 \times$ id. $= 44,9$ "

$2\varphi_6 = 90°$

$k_6 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id $= 31,8$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$c_6 = k_6 = 31,8$ mm $\quad b_6 = d_6 = 44,9$ mm $\quad \ell_6 = 2c_6 = 2k_6 = 2 \times 31,8 = 63,6$ mm

---

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 6 cuadrados de 63,5 mm. de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada $\quad \ell_6$ lado del exaedro (dato)

a_6 = Radio de la esfera circunscrita al exaedro.

b_6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_6 = Radio de la esfera inscrita

d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara



$2\varphi_6$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k_6 = Apotema del polígono de una cara

h_6 = Altura del exaedro.

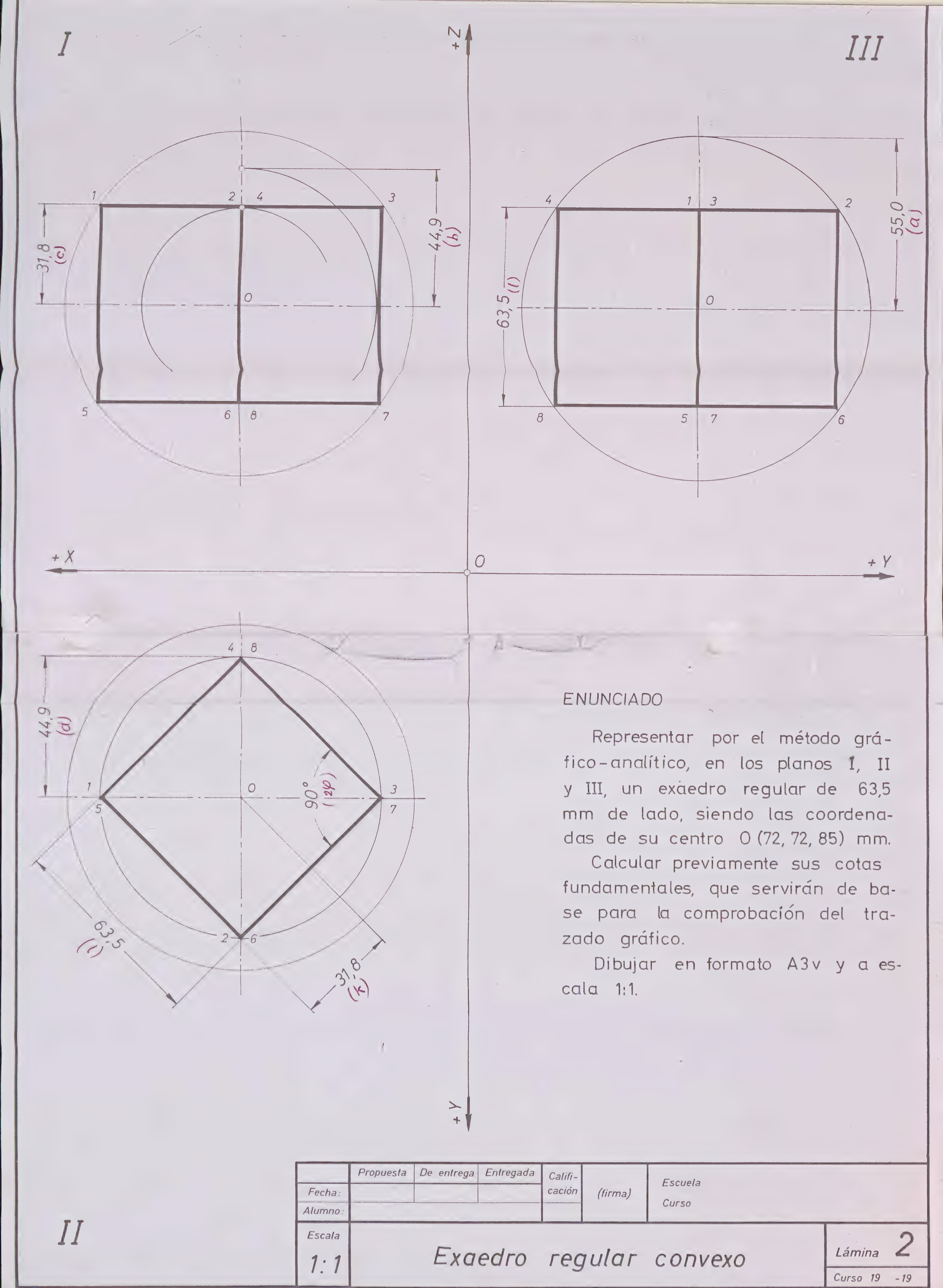
S_6 = Superficie.

V_6 = Volumen.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_6	(11) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ell_6$	$0.86\ 60\ 25 \ldots\ \ell_6$
b_6	(12) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell_6$	$0.70\ 71\ 07 \ldots\ \ell_6$
c_6	(13) $\frac{1}{2}\ \ell_6$	$0.50\ 00\ 00 \ldots\ \ell_6$
d_6	(14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ \ell_6$	$0.70\ 71\ 07 \ldots\ \ell_6$
$2\varphi_6$	(15) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0.70\ 71\ 07\ldots$ $2\varphi = 90°$
k_6	(16) $\frac{1}{2}\ \ell_6$	$0.50\ 00\ 00 \ldots\ \ell_6$
h_6	(17) $1\ \ell_6$	$1.00\ 00\ 00 \ldots\ \ell_6$
S	(18) $6\ \ell_6^2$	$6.00\ 00\ 00 \ldots\ \ell_6^2$
V	(19) $1\ \ell_6^3$	$1.00\ 00\ 00 \ldots\ \ell_6^3$
(20)	Relaciones entre magnitudes	
$c_6 = k_6$	$b_6 = d_6$	$h_6 = 2c_6$ $h_6 = 2k_6$





ENUNCIADO

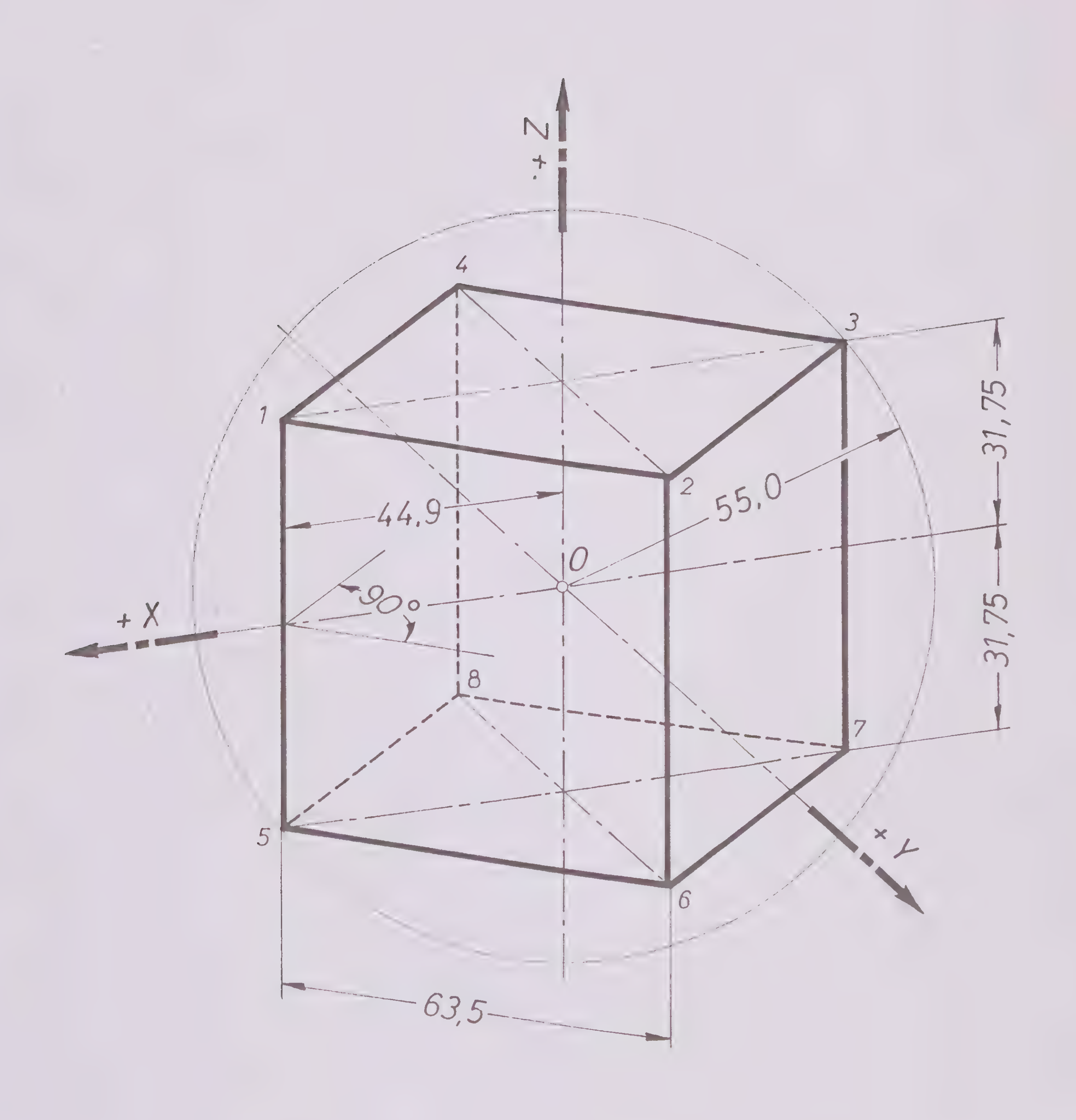
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un exaedro regular de 63,5 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de base para la comprobación del trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Exaedro regular convexo	Lámina 2 Curso 19 -19



Exaedro regular convexo

Lámina 3	OCTAEDRO REGULAR CONVEXO	3

Lámina 3

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un octaedro regular de 77,8 mm. de lado, siendo las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

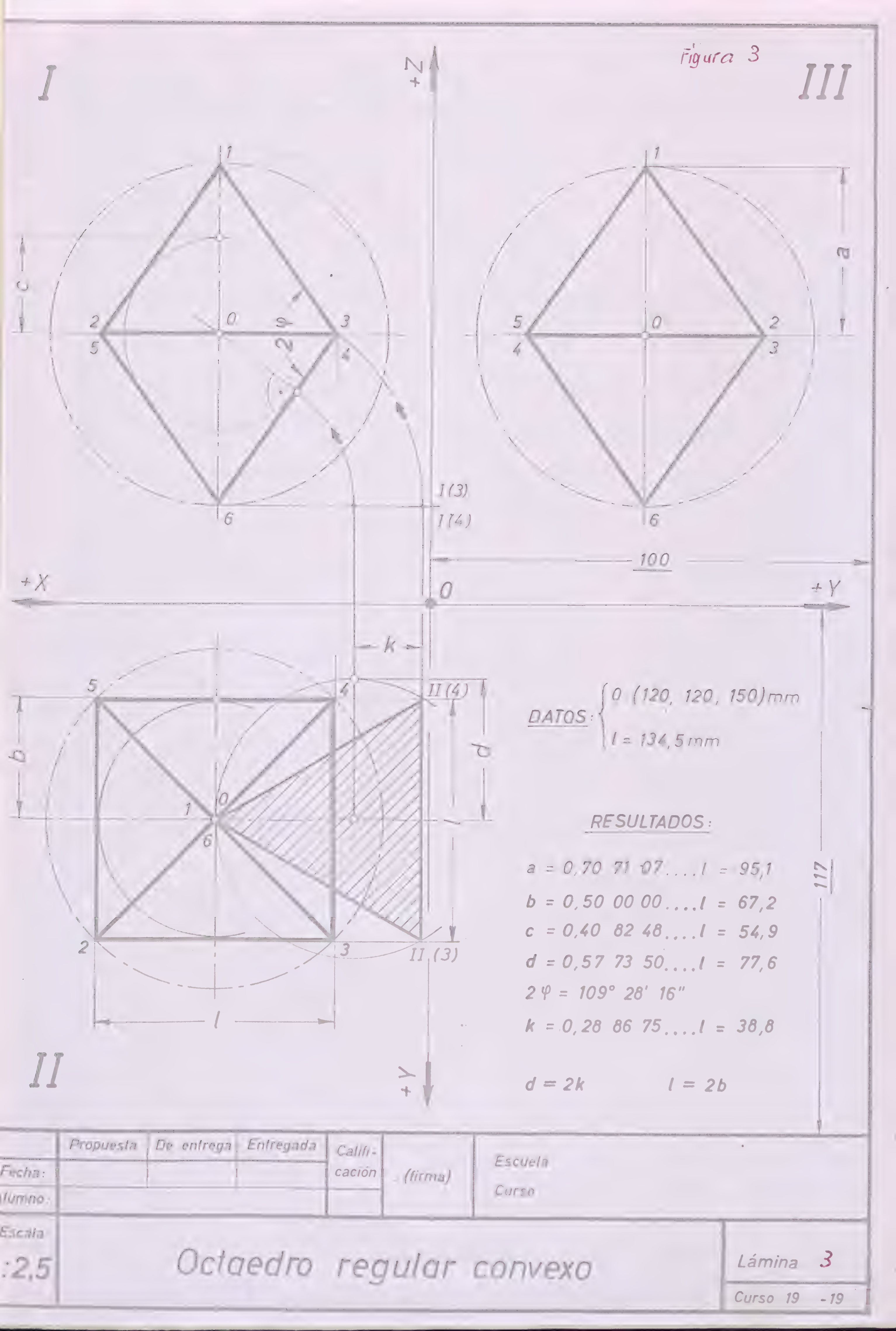
DATOS O(72, 72, 85) mm

l_8 = 77.8 mm.

UNE A4 210 X 297

30 - 3 - 71




Figura 3
I
III
II
+Z
+X
+Y
+Y
0
1
2
3
4
5
6
c
a
b
d
k
l
2φ
I(3)
I(4)
II(4)
II(3)
100
117
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 134,5 mm
RESULTADOS:
a = 0,70 71 07....l = 95,1
b = 0,50 00 00....l = 67,2
c = 0,40 82 48....l = 54,9
d = 0,57 73 50....l = 77,6
2φ = 109° 28' 16"
k = 0,28 86 75....l = 38,8
d = 2k
l = 2b
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Fecha:
Alumno:
Escuela
Curso
Escala
1:2,5
Octaedro regular convexo
Lámina 3
Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Situaremos el octaedro, con respecto a los planos de proyección, de forma que una de sus caras sea perpendicular al plano I y una diagonal del mismo que une vértices opuestos, sea simultáneamente perpendicular a II.

Conociendo el lado, el trazado de la proyección del octaedro en el plano II. (fig. 3) es inmediato, dándonos al mismo tiempo las proyecciones de sus 6 vértices, que se numeraran del 1 al 6.

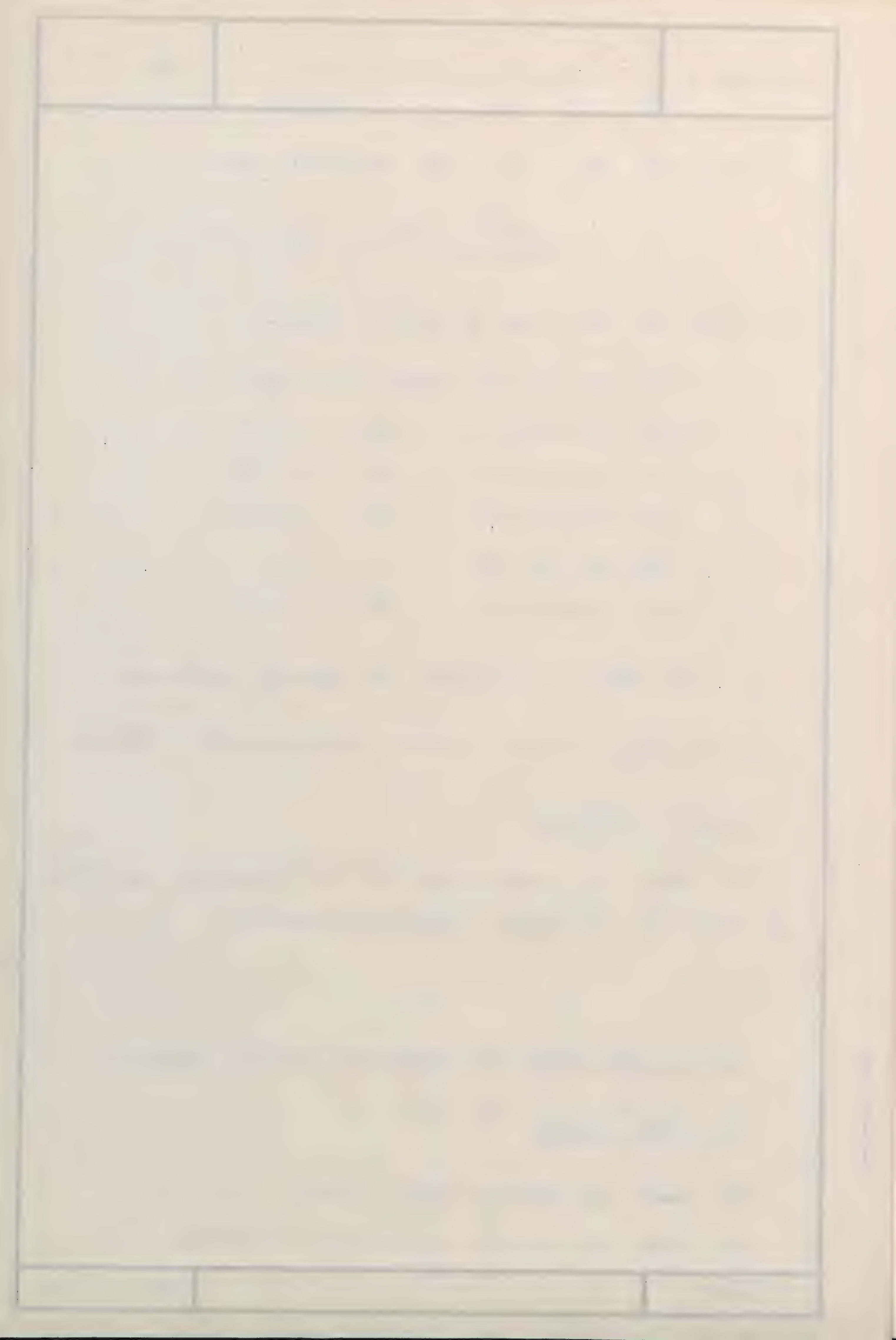
La proyección en I se obtiene por el giro de la cara II (6·3·4), perpendicular a I, alrededor de un eje que pasando por II (6) es también perpendicular a I; el centro I (0) de la esfera circunscrita, así como su radio, se obtienen por el anterior giro, sirviendo de comprobación al obtenido anteriormente en II, ya que deberán ser de igual longitud.

La proyección sobre III se deduce de las I y II.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para utilizar este proceso se calcularan previamente las magnitudes acotadas en la figura 3, tomando los valores de los coeficientes de la tabla incluida en la misma.

La longitud del lado dado se ha fijado partiendo de la base de que el radio a de la esfera circunscrita tenga el valor exacto de 55 mm.



b_8 = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_8 = Radio de la esfera inscrita

d_8 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_8$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

k_8 = Apotema del polígono de una cara

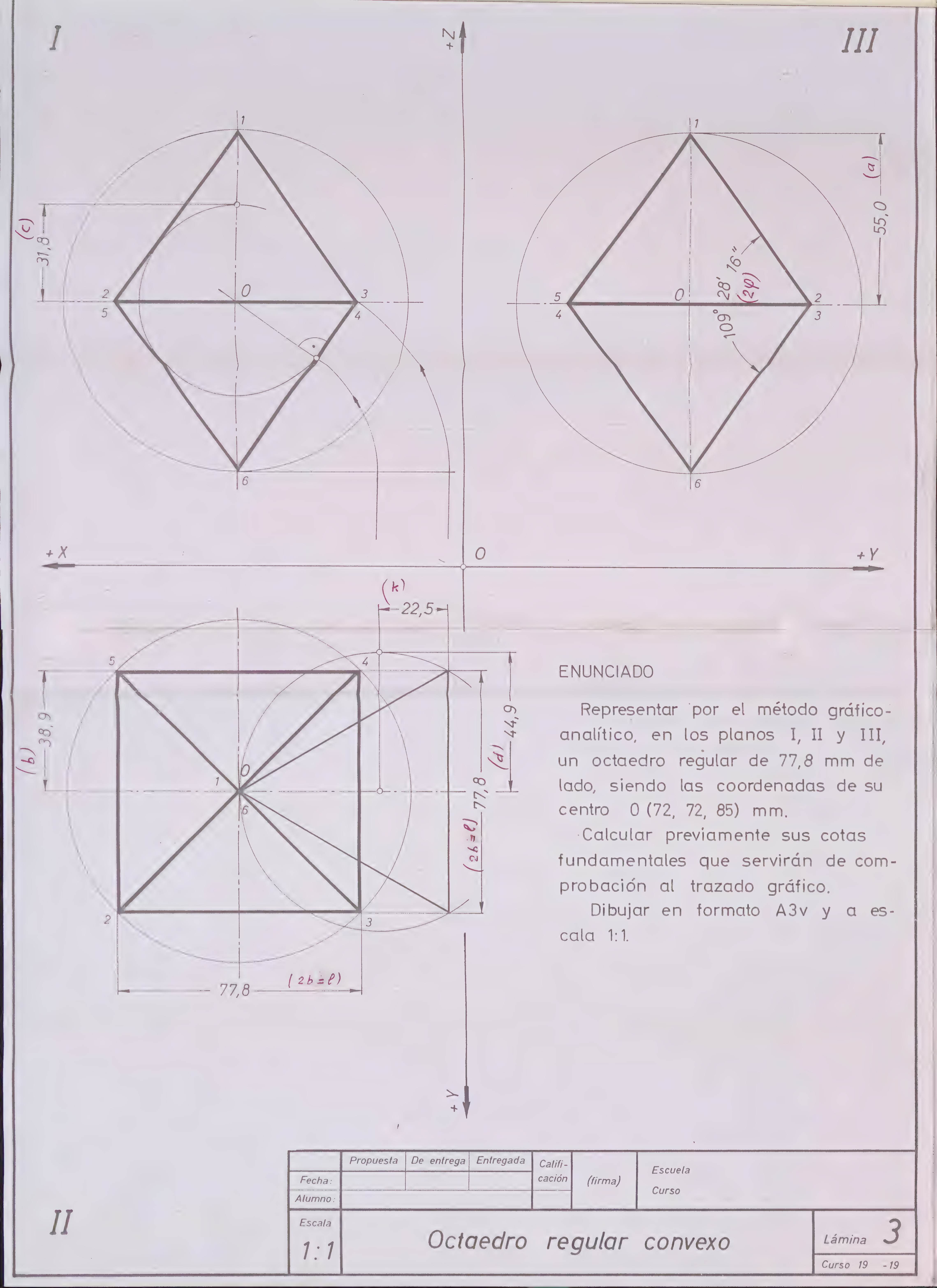
S_8 = Superficie.

V_8 = Volumen.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a_8	(21) $\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$	$0{,}70\ 71\ 07 \ldots\ l_8$	×
b_8	(22) $\frac{1}{2}\, l_8$	$0{,}50\ 00\ 00 \ldots\ l_8$	–
c_8	(23) $\frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8$	$0{,}40\ 82\ 48 \ldots\ l_8$	×
d_8	(24) $\frac{\sqrt{3}}{3}\, l_8$	$0{,}57\ 73\ 50 \ldots\ l_8$	×
$2\varphi_8$	(25) $\operatorname{sen} \varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\operatorname{sen} \varphi = 0{,}81\ 64\ 97 \ldots$ $2\varphi_8 = 109°\ 28'\ 16{,}4''$	×
k_8	(26) $\frac{\sqrt{3}}{6}\, l_8$	$0{,}28\ 86\ 75 \ldots\ l_8$	–
S_8	(27) $2\sqrt{3}\, l_8^2$	$3{,}46\ 41\ 02 \ldots\ l_8^2$	×
V_8	(28) $\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8^3$	$0{,}47\ 14\ 05 \ldots\ l_8^3$	×
(29) Relaciones entre magnitudes			
$d_8 = 2k_8 \qquad l_8 = 2b_8$			

UNE A4 210 X 297



ENUNCIADO

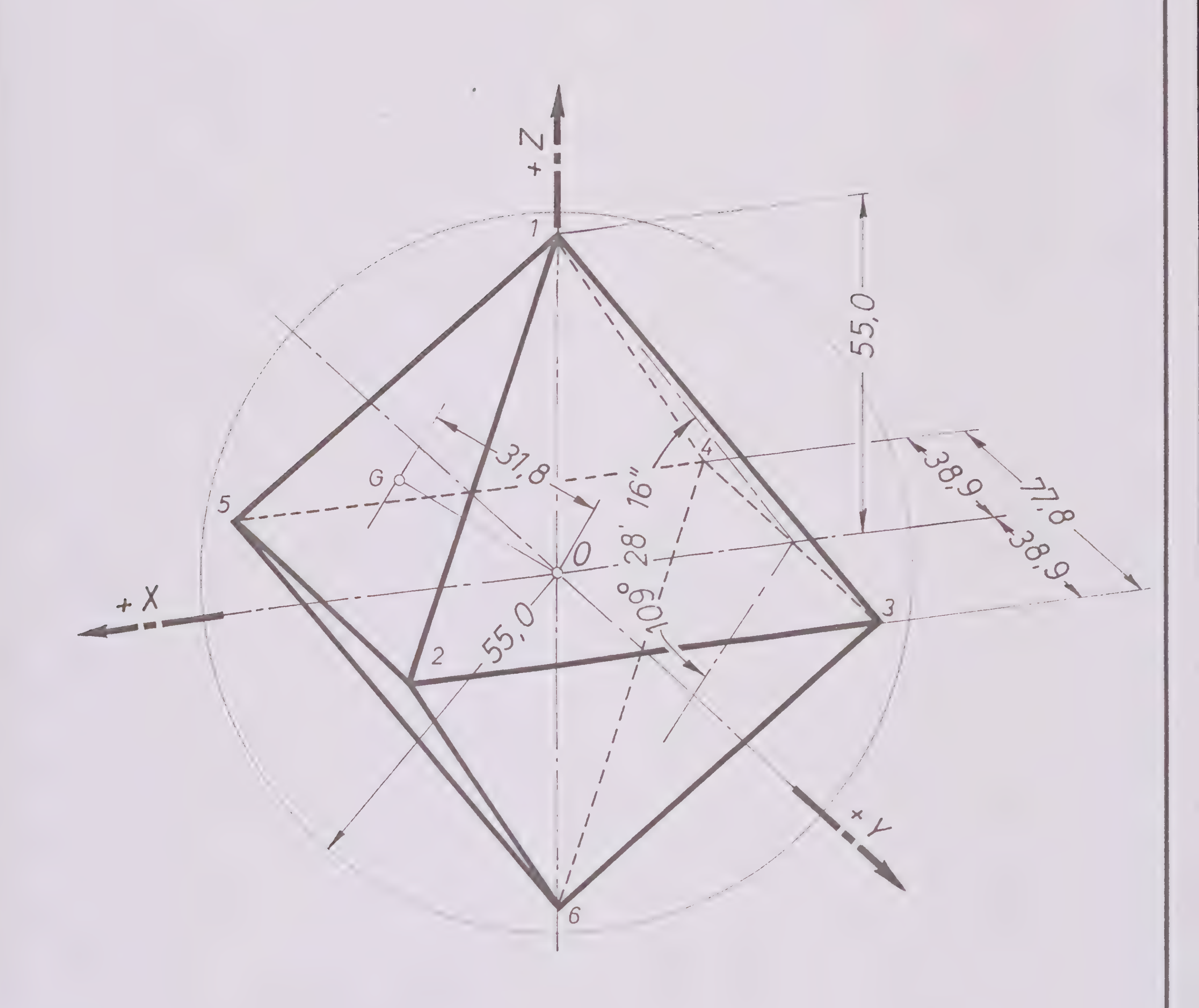
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un octaedro regular de 77,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Octaedro regular convexo	Lámina 3 / Curso 19 -19



Octaedro regular convexo

Lámina 4	DODECAEDRO REGULAR CONVEXO	4

Lámina 4

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un dodecaedro regular de 39,3 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

l_{12} = 39,3 mm

UNE A4 210 X 297

		20 - 3 - 73

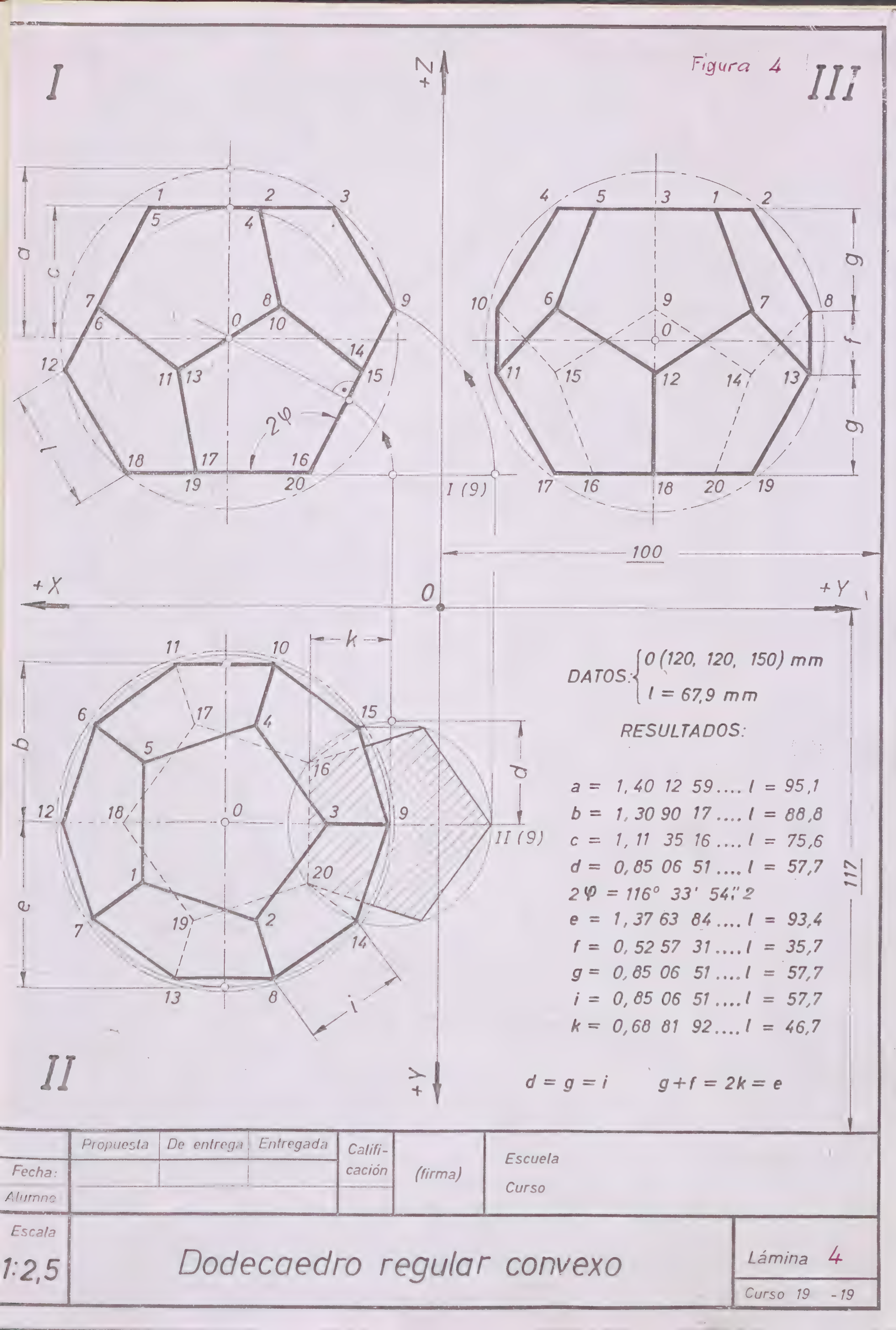


Figura 4
I
III
II
+Z
+X
+Y
0
100
117
I (9)
II (9)
2φ
a
b
c
d
e
f
g
i
k
l
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 67,9 mm
RESULTADOS:
a = 1,40 12 59 .... l = 95,1
b = 1,30 90 17 .... l = 88,8
c = 1,11 35 16 .... l = 75,6
d = 0,85 06 51 .... l = 57,7
2φ = 116° 33' 54,"2
e = 1,37 63 84 .... l = 93,4
f = 0,52 57 31 .... l = 35,7
g = 0,85 06 51 .... l = 57,7
i = 0,85 06 51 .... l = 57,7
k = 0,68 81 92 .... l = 46,7
d = g = i
g + f = 2k = e
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Escuela
Curso
Fecha:
Alumno
Escala
1:2,5
Dodecaedro regular convexo
Lámina 4
Curso 19 - 19

<u>PROCESO GRÁFICO</u>

Para facilitar la solución de este ejercicio, situaremos el dodecaedro de forma que una de sus caras sea paralela al plano II y otra contigua perpendicular a I, numerando previamente sus vértices del 1 al 20.

El trazado se inicia situando la cara inferior 16-17-18-19-20 (ver fig. 4) en los planos I y II, y girando simultáneamente dos caras contiguas o consecutivas alrededor de sus respectivas aristas comunes con la inferior;* La proyección de las trayectorias de los vértices girados en el plano II nos permite obtener el radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular que forma el contorno exterior de la proyección sobre II del dodecaedro, así como las proyecciones y aristas de todos sus vértices.

La trayectoria sobre el plano I del giro de los vértices de la cara 9·14·20·16·15, juntamente con las proyecciones de estos vértices obtenidos ya en II, nos permite obtener en I las proyecciones de los mencionados vértices, así como el centro O de la esfera circunscrita, lo cual nos permite completar la proyección sobre I de los restantes vértices y aristas del dodecaedro.

La proyección sobre III se deduce de las I y II.

---

* (intercalar la siguiente frase)

... inferior; la situación de dicha cara en el plano I requiere previamente la determinación del radio de la esfera inscrita, cuyo valor será

$c = 1.11\,35\,16 \times 39.3 = 43.7$ mm.



PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Para realizar este proceso se calcularán previamente las magnitudes acotadas en la figura 4, tomando los valores de los coeficientes de la tabla incluida en la misma.

La longitud del lado se ha fijado partiendo de la base de que el radio a de la esfera circunscrita tenga el valor exacto de 55 mm.

La dimensión del lado l con seis decimales, será:

$$l = \frac{55}{1,40\ 12\ 59} = 39,25\ 04\ 17...\ mm$$

con cuyo valor, como base de cálculo, obtenemos:

$a = 1.40\ 12\ 59 \times 39,25\ 04\ 17 = 55,0$ mm

$b = 1.30\ 90\ 17 \times$ id $= 51,4$ "

$c = 1.11\ 35\ 16 \times$ id $= 43,7$ "

$d = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 33,4$ "

$2\varphi = 116^\circ\ 33'\ 54''$

$e = 1,37\ 63\ 82 \times$ id. $= 54,0$ "

$f = 0,52\ 57\ 31 \times$ id $= 20,6$ "

$g = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 33,4$ "

$i = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 33,4$ "

$k = 0,68\ 81\ 91 \times$ id $= 27,0$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$d = g = i = 33,4$ mm $\quad g + f = 2k = e = 33,4 + 20,6 = 2 \times 27,0 = 54,0$ mm



FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 12 pentágonos regulares de 39,3 mm de lado. (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l_{12} = Lado del dodecaedro dado (dato)

a_{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro

b_{12} = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_{12} = Radio de la esfera inscrita

d_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno de la vista II.

f_{12} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y II.

g_{12} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

i_{12} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k_{12} = Apotema del polígono de una cara.

S_{12} = Superficie

V_{12} = Volumen.

UNE A4 210 X 297



CUADRO SINÓPTICO

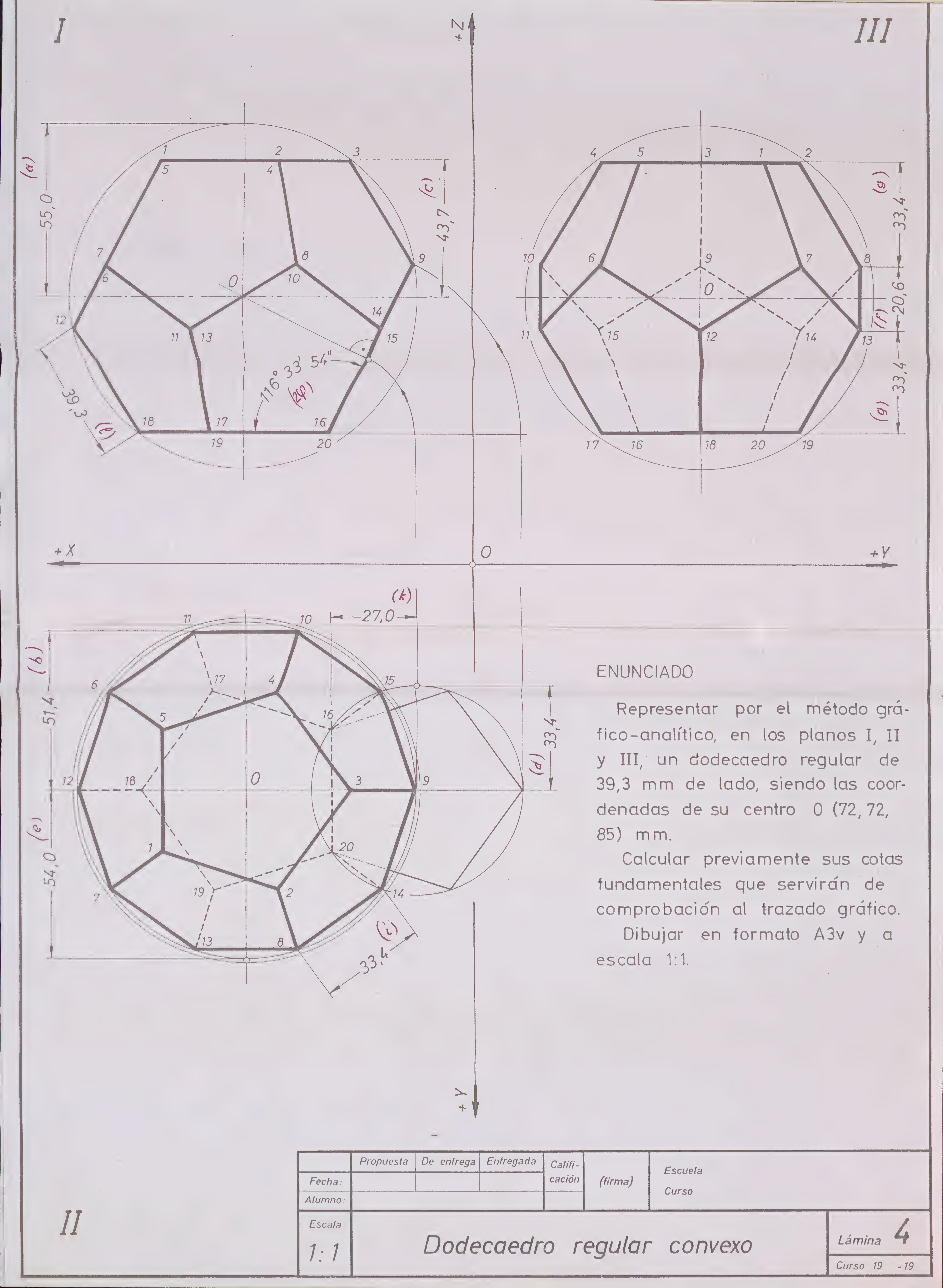
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_{12}	(30) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,\ell_{12}$	$1{,}40\ 12\ 59\ldots\ \ell_{12}$
b_{12}	(31) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}\,\ell_{12}$	$1{,}30\ 90\ 17\ldots\ \ell_{12}$
c_{12}	(32) $\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\,\ell_{12}$	$1{,}11\ 35\ 16\ldots\ \ell_{12}$
d_{12}	(33) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	$0{,}85\ 06\ 51\ldots\ \ell_{12}$
2φ	(34) $\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{sen}\varphi=0{,}85\ 06\ 51\ldots$ $2\varphi=116°\ 33'\ 54{,}2''$
e_{12}	(35) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell_{12}$	$1{,}37\ 63\ 82\ldots\ \ell_{12}$
f_{12}	(36) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	$0{,}52\ 57\ 31\ldots\ \ell_{12}$
g_{12}	(37) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	$0{.}85\ 06\ 51\ldots\ \ell_{12}$
i_{12}	(38) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	$0{,}85\ 06\ 51\ldots\ \ell_{12}$
k_{12}	(39) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell_{12}$	$0{.}68\ 81\ 91\ldots\ \ell_{12}$
S_{12}	(40) $3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\ell_{12}^2$	$20{,}64\ 57\ 29\ldots\ \ell_{12}^2$
V_{12}	(41) $\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\,\ell_{12}^3$	$7{,}66\ 31\ 19\ldots\ \ell_{12}^3$

(42) Relaciones entre magnitudes

$e_{12}=2k_{12}$ $\quad d_{12}=g_{12}=i_{12}$ $\quad g_{12}+f_{12}=2k_{12}$

UNE A4 210 X 297





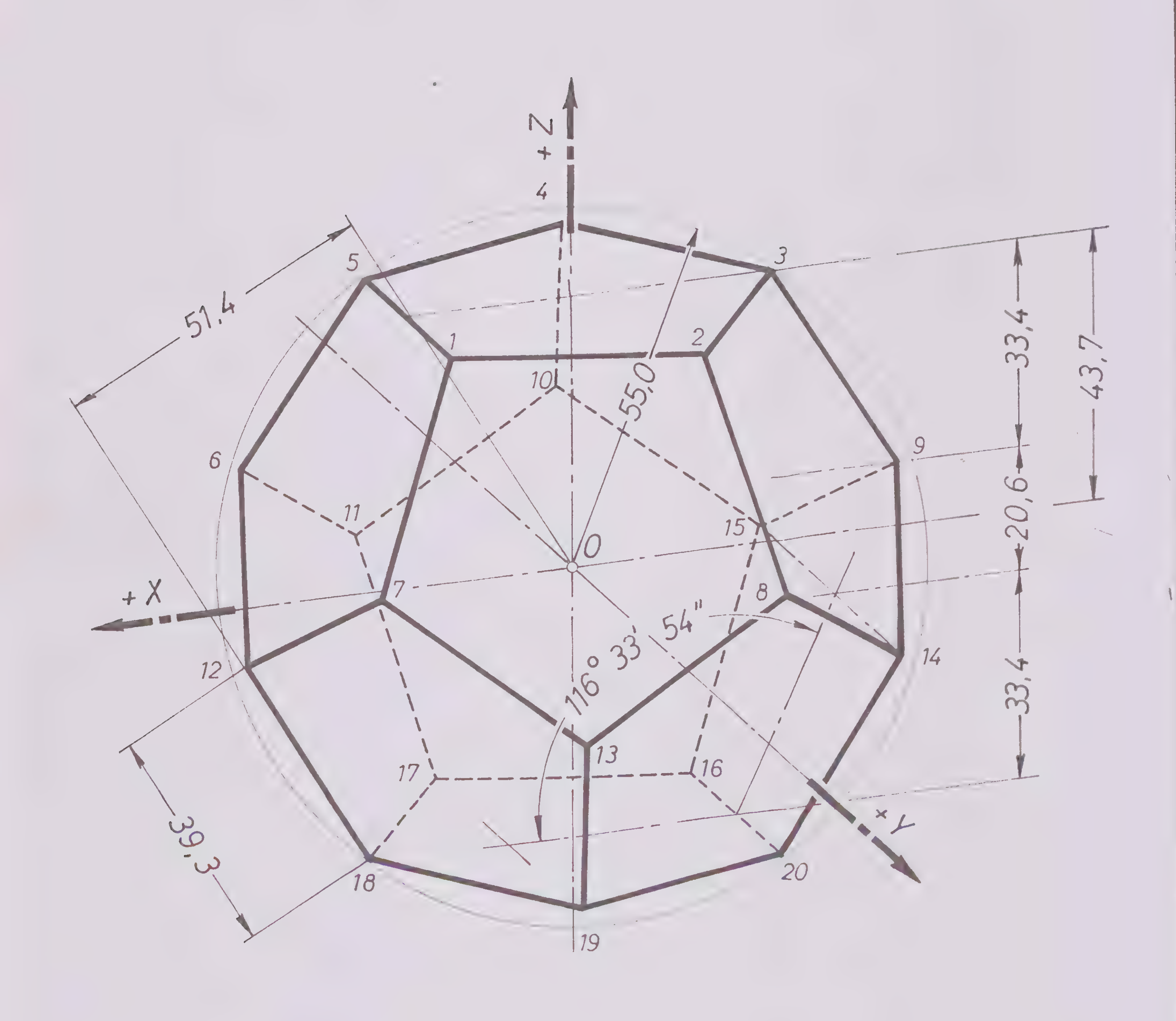
Dodecaedro regular convexo

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un dodecaedro regular de 39,3 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.



Dodecaedro regular convexo

Lámina 5	ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO	5

Lámina 5

Enunciado:

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, un icosaedro regular de 57,8 mm. de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 73, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 73, 85) mm

l_{20} = 57,8 mm



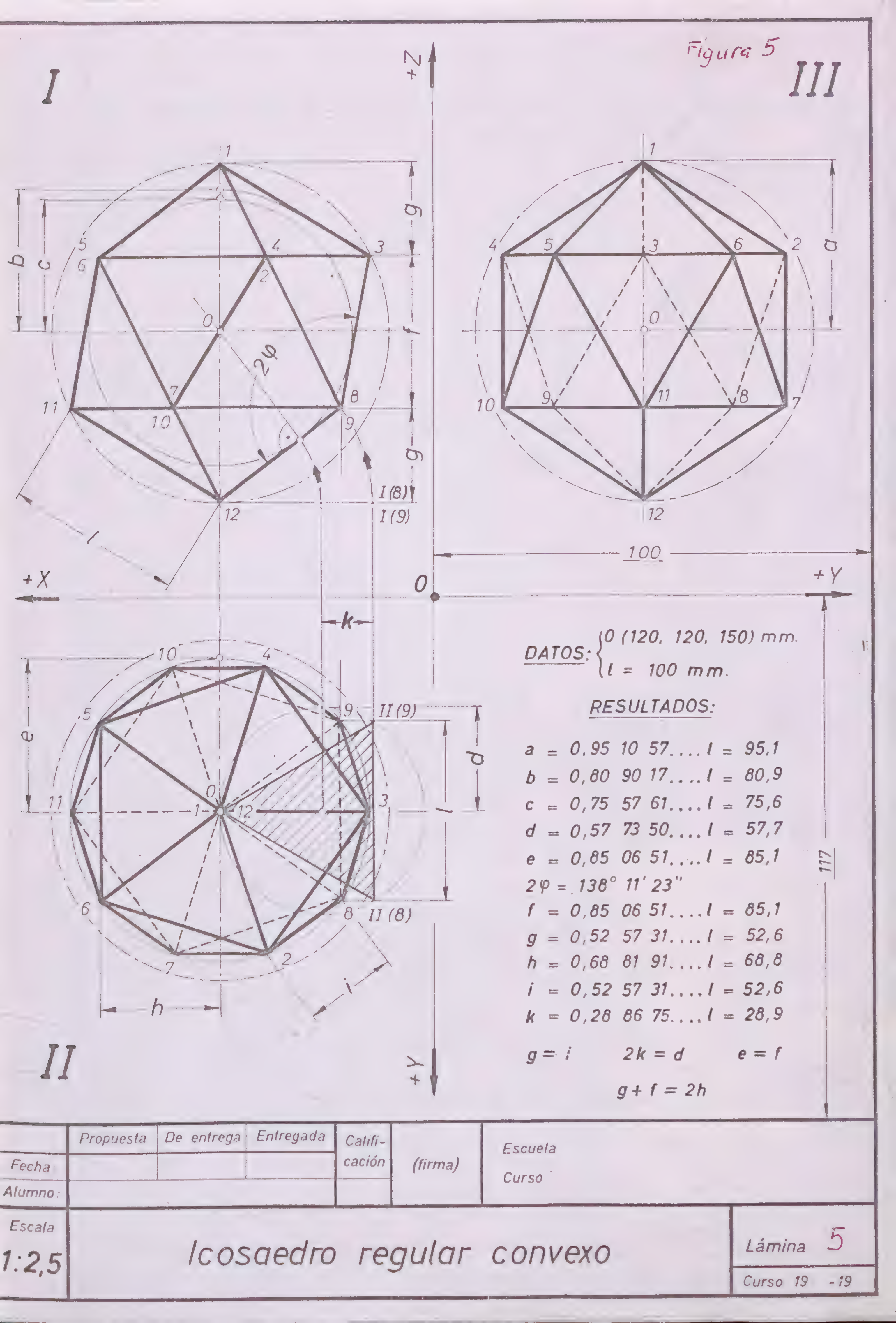


Figura 5
I
III
II
+Z
+X
+Y
0
100
117
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm. l = 100 mm.
RESULTADOS:
a = 0,95 10 57.... l = 95,1
b = 0,80 90 17.... l = 80,9
c = 0,75 57 61.... l = 75,6
d = 0,57 73 50.... l = 57,7
e = 0,85 06 51.... l = 85,1
2φ = 138° 11' 23"
f = 0,85 06 51.... l = 85,1
g = 0,52 57 31.... l = 52,6
h = 0,68 81 91.... l = 68,8
i = 0,52 57 31.... l = 52,6
k = 0,28 86 75.... l = 28,9
g = i
2k = d
e = f
g + f = 2h
I(8)
I(9)
II(9)
II(8)
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Escuela
Curso
Fecha
Alumno:
Escala
1:2,5
Icosaedro regular convexo
Lámina 5
Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Gráficamente se resuelve este ejercicio situando el icosaedro con un eje (diámetro de la esfera circunscrita) perpendicular a II y una de las cinco caras con vértice en un extremo de dicho eje, perpendicular a I. Los vértices se numerarán del 1 al 12

El trazado gráfico se inicia por el vértice inferior 12 (ver figura nº 5) construyendo previamente en II el pentágono regular 7-8-9-10-11 cuyo lado sea de 57,8 mm., y completando la proyección II con el decágono que forma su contorno.

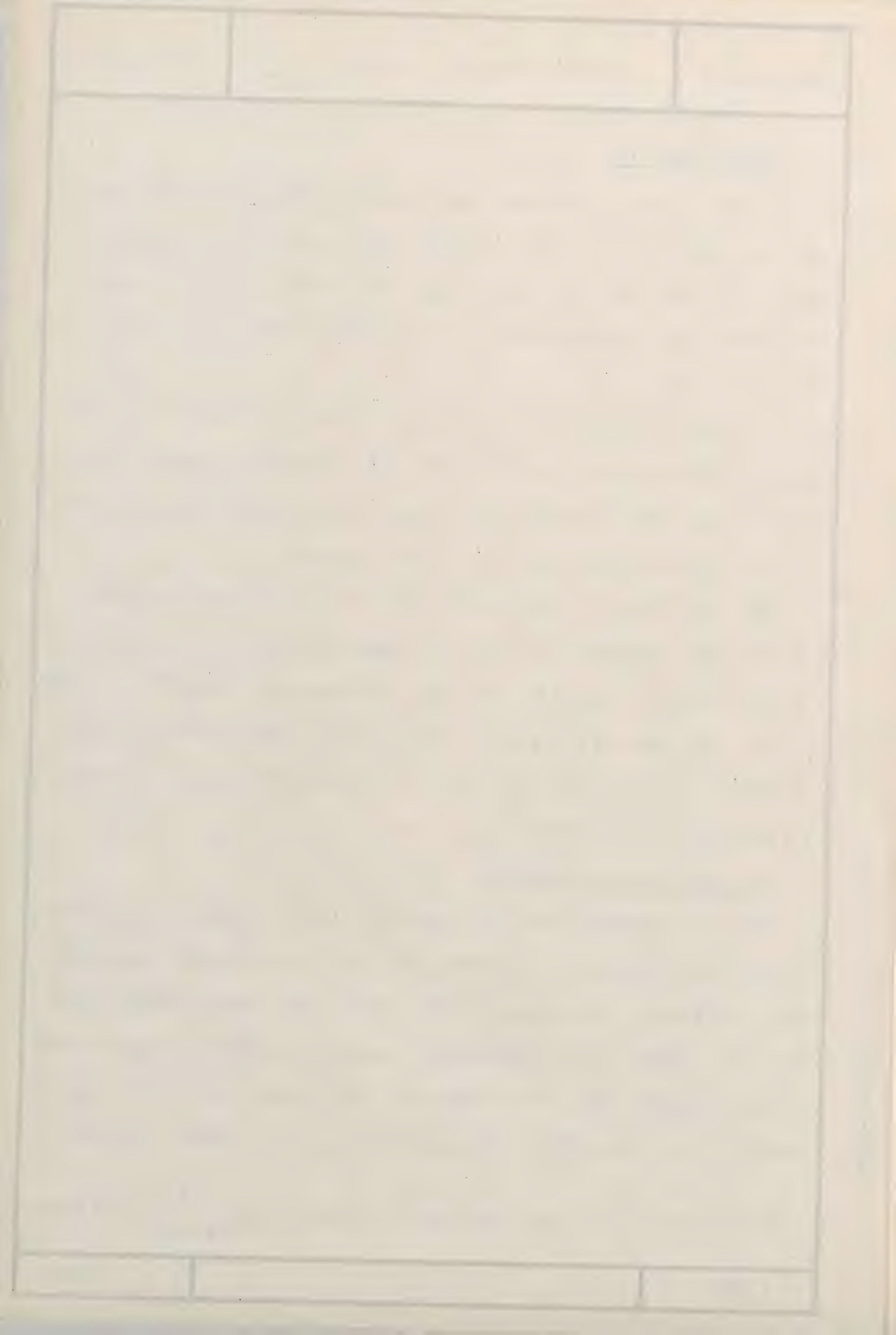
Con esta base, y mediante el giro de la cara abatida II (8-9-12), alrededor de un eje perpendicular a I y que pasa por 12, podemos completar las dos proyecciones restantes en I y III, ya que el centro I(0) queda determinado fácilmente por la intersección con el eje I (1·12) de la perpendicular a la cara I (8-9-12) por su centro.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los inevitables errores gráficos, y facilitar al mismo tiempo el trazado, con su continuada comprobación, deberán calcularse previamente las magnitudes acotadas con letras en la figura 5, según la tabla correspondiente.

La longitud del lado dado se ha fijado de forma que el radio $\underline{a}$ de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm.

Su dimensión l, con seis decimales, será: $l = \dfrac{55}{0,95\,10\,57...} \cong 57,83\,03\,93$ mm



con cuyo valor tendremos:

$a = 0{,}95\ 10\ 57 \times 57{,}83\ 03\ 93 = 55{,}0$ mm

$b = 0{,}80\ 90\ 17 \times$ id. $= 46{,}8$ "

$c = 0{,}75\ 57\ 61 \times$ id. $= 43{,}7$ "

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \times$ id. $= 33{,}4$ "

$e = 0{,}85\ 06\ 51 \times$ id. $= 49{,}2$ "

$2\varphi = 138°\ 11'\ 23''$

$f = 0{,}85\ 06\ 51 \times$ id $= 49{,}2$ "

$g = 0{,}52\ 57\ 31 \times$ id $= 30{,}4$ "

$h = 0{,}68\ 81\ 91 \times$ id $= 39{,}8$ "

$i = 0{,}52\ 57\ 31 \times$ id $= 30{,}4$ "

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id $= 16{,}7$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$g = i = 30{,}4$ mm

$2k = d = 2 \times 16{,}7 = 33{,}4$ mm

$e = f = 49{,}2$ mm

$g + f = 2h = 30{,}4 + 49{,}2 = 2 \times 39{,}8 = 79{,}6$ mm

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros de 57,8 mm de lado (dato del ejercicio).

UNE A4 210 X 297



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l_{20} = Lado del icosaedro dado (dato).

a_{20} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro.

b_{20} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_{20} = Radio de la esfera inscrita.

d_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado l y también al decágono regular de lado i, contorno de la vista II.

f_{20} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g_{20} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

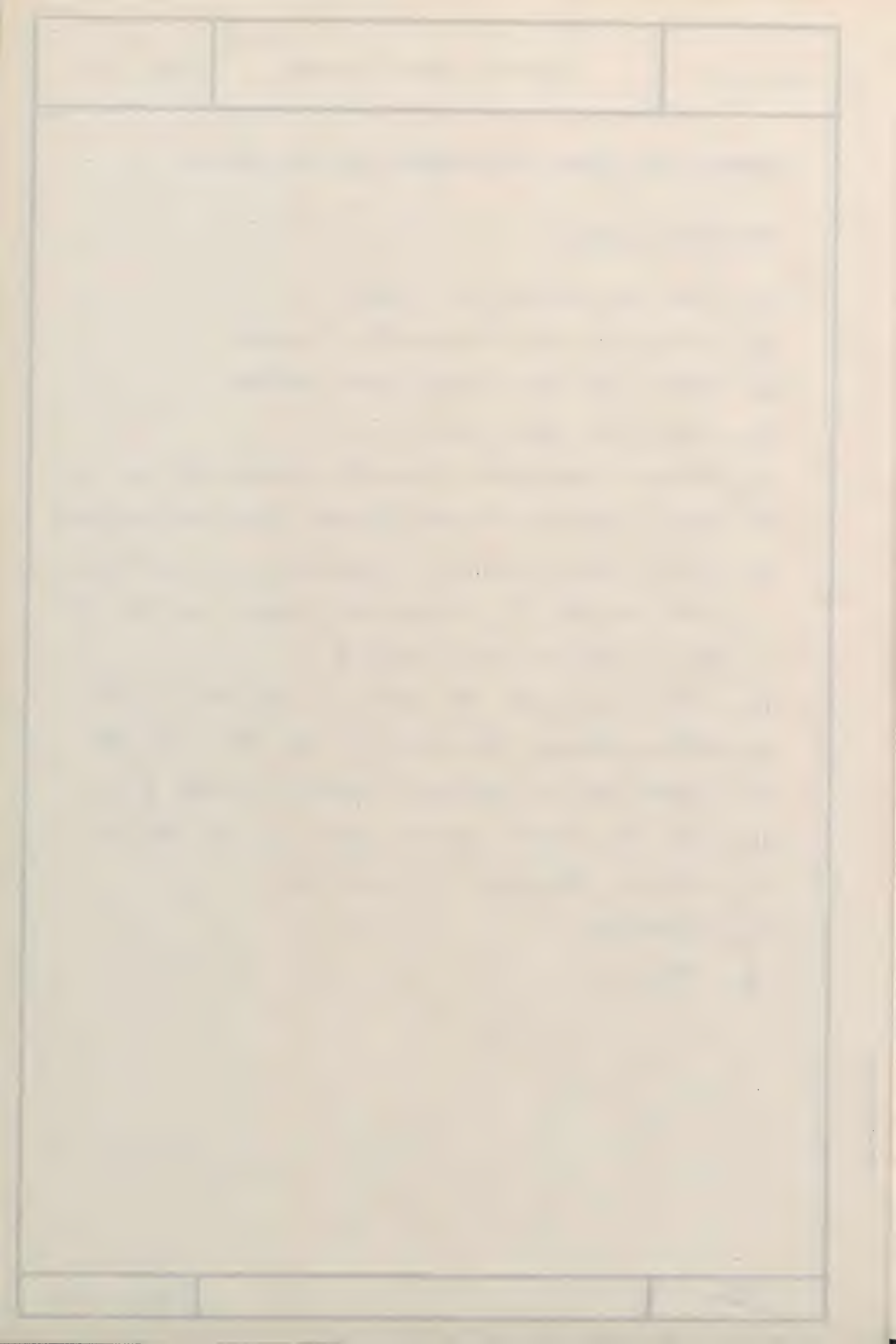
h_{20} = Apotema de un pentágono regular de lado l.

i_{20} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k_{20} = Apotema del polígono de una cara.

S_{20} = Superficie.

V_{20} = Volumen.



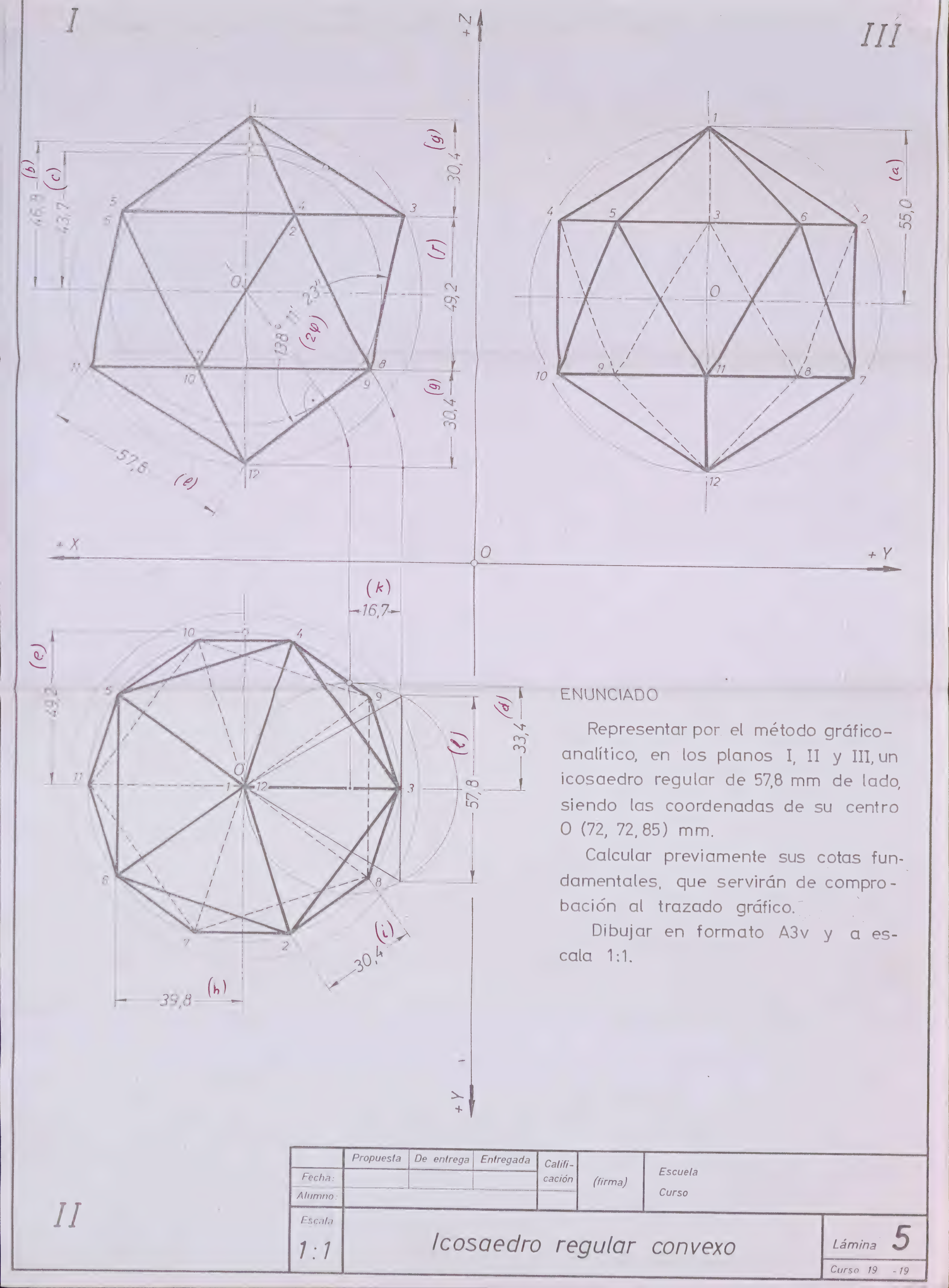
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_{20}	(43) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, \ell_{20}$	$0{,}95\ 10\ 57\ldots\ \ell_{20}$
b_{20}	(44) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\, \ell_{20}$	$0{,}80\ 90\ 17\ldots\ \ell_{20}$
c_{20}	(45) $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, \ell_{20}$	$0{,}75\ 57\ 61\ldots\ \ell_{20}$
d_{20}	(46) $\frac{\sqrt{3}}{3}\, \ell_{20}$	$0{,}57\ 73\ 50\ldots\ \ell_{20}$
2φ	(47) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0{,}93\ 41\ 72\ldots$ $2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 22{,}8''$
e_{20}	(48) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, \ell_{20}$	$0{,}85\ 06\ 51\ldots\ \ell_{20}$
f_{20}	(49) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, \ell_{20}$	$0{,}85\ 06\ 51\ldots\ \ell_{20}$
g_{20}	(50) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, \ell_{20}$	$0{,}52\ 57\ 31\ldots\ \ell_{20}$
h_{20}	(51) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, \ell_{20}$	$0{,}68\ 81\ 91\ldots\ \ell_{20}$
i_{20}	(52) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, \ell_{20}$	$0{,}52\ 57\ 31\ldots\ \ell_{20}$
k_{20}	(53) $\frac{\sqrt{3}}{6}\, \ell_{20}$	$0{,}28\ 86\ 75\ldots\ \ell_{20}$
S_{20}	(54) $5\sqrt{3}\, \ell_{20}^2$	$8{,}66\ 02\ 54\ldots\ \ell_{20}^2$
V_{20}	(55) $\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\, \ell_{20}^3$	$2{,}18\ 16\ 95\ldots\ \ell_{20}^3$

(56) Relaciones entre magnitudes

$g_{20} = i_{20}$ $\quad 2k_{20} = d_{20}$ $\quad e_{20} = f_{20}$ $\quad g_{20} + f_{20} = 2h_{20}$

UNE A4 210 X 297



ENUNCIADO

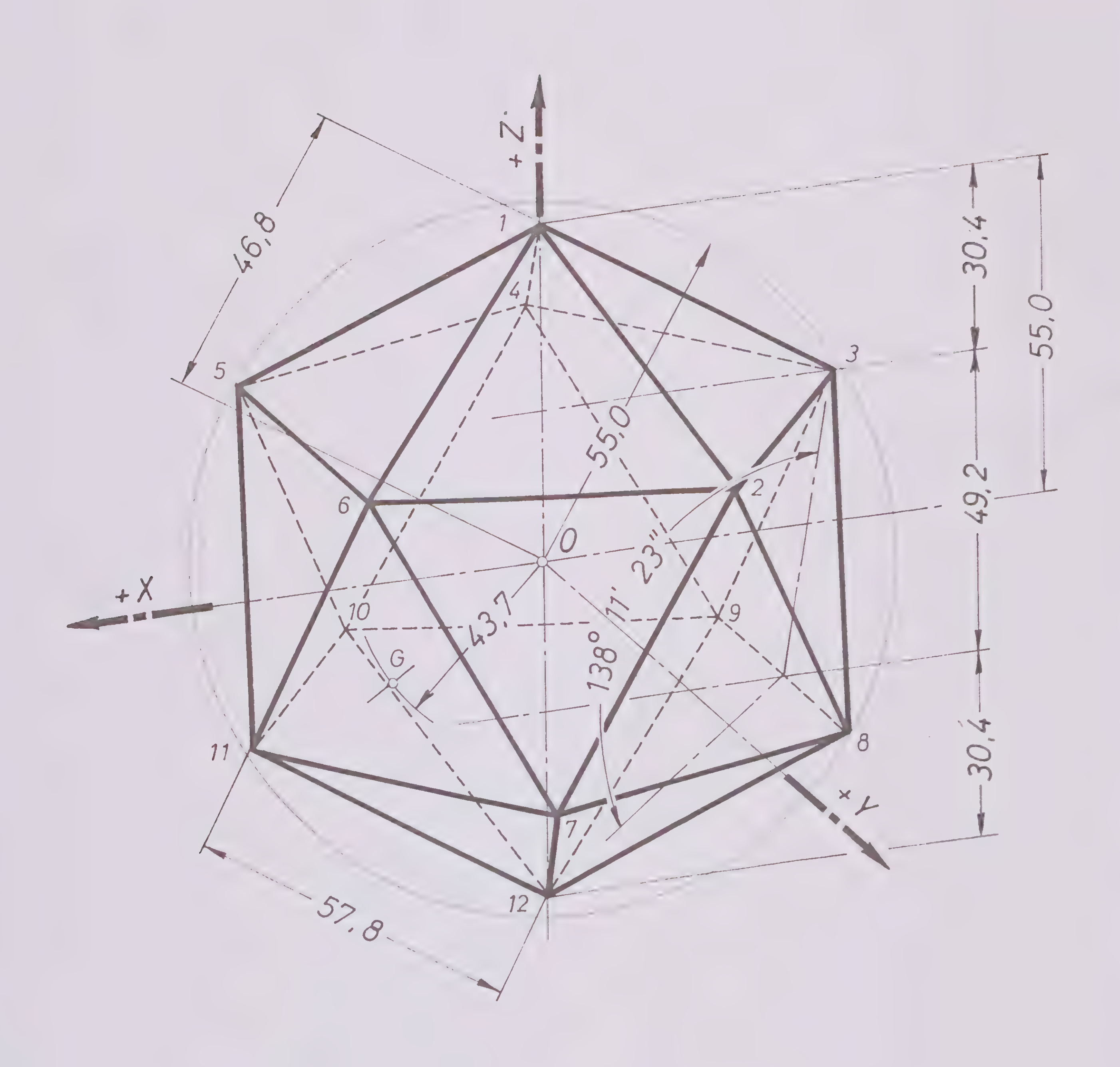
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un icosaedro regular de 57,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Icosaedro regular convexo	Lámina 5 — Curso 19 -19



Icosaedro regular convexo

Lámina 6	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS A) Centros de caras	6

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

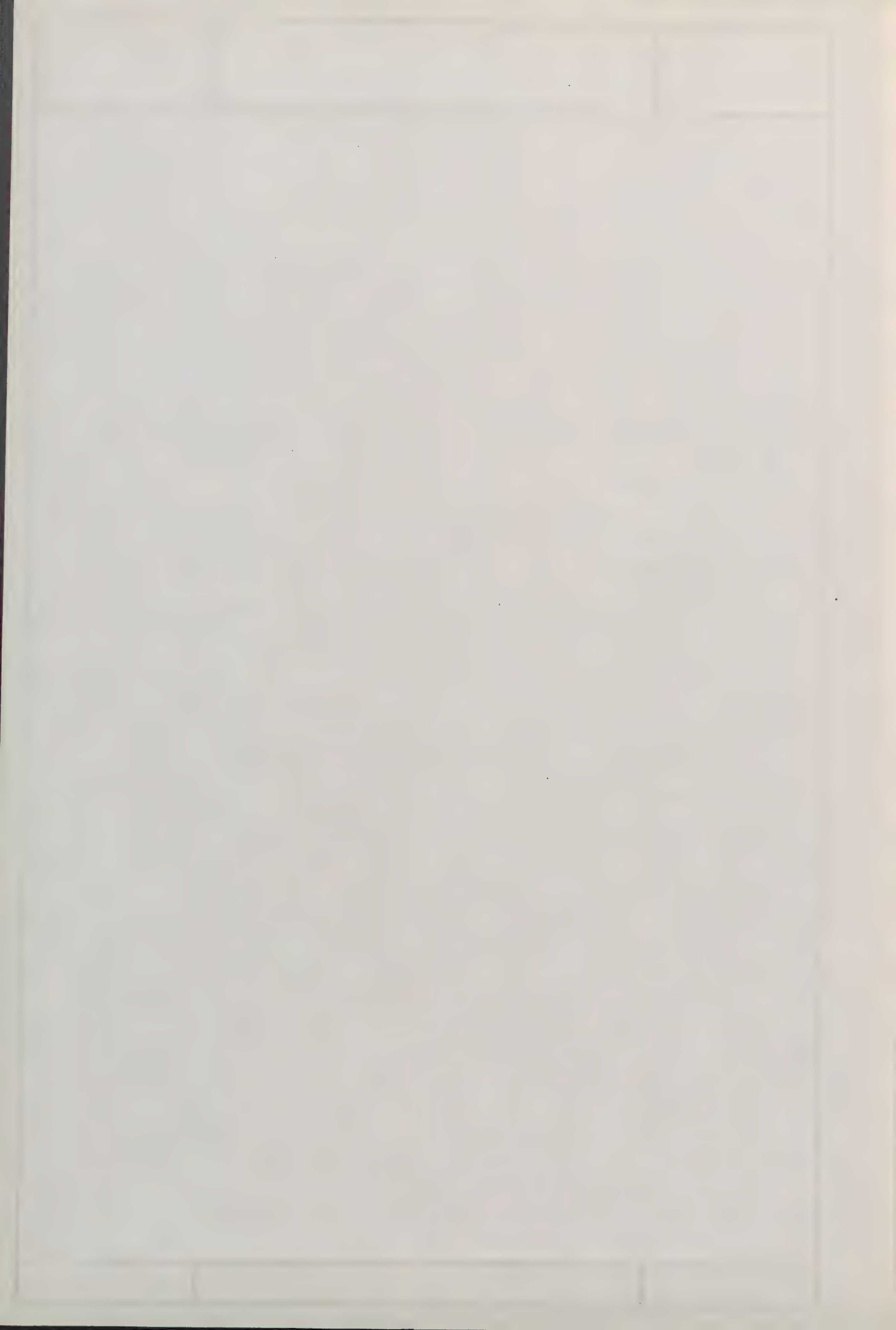
Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_3 = 55,0 mm.



Definiciones y propiedades de los poliedros regulares convexos conjugados

Si unimos con un segmento rectilíneo los centros de dos caras contiguas de un poliedro regular P, se obtiene un nuevo poliedro P', llamado "conjugado" del anterior, que goza de las siguientes propiedades:

1º El conjugado P' del poliedro regular convexo P, es también un poliedro regular convexo.

En efecto: a) Al estar situado los vértices de P' en los centros de las caras de P, y ser éste regular, dichos vértices del P' pertenecerán a la esfera inscrita en P, que será a su vez circunscrita a P'; b) Siendo constante el diedro formado por dos caras contiguas de P, e iguales las apotemas de los polígonos de dichas caras, será constante la distancia entre los centros de estas caras. Por consiguiente, el poliedro convexo P' tiene todas sus aristas iguales y es inscriptible en una esfera, luego es "regular"

2º El conjugado P' del poliedro regular convexo P, tiene un número de vértices V' igual al de caras C de P.

En efecto, por su formación, al centro de cada ca-



da cara de P le corresponde un vértice de P.'

El número de caras C, vértices V y aristas A de los cinco poliedros regulares convexos, es el siguiente:

Poliedro regular	Caras C	Vértices V	Aristas A
TETRAEDRO	4	4	6
EXAEDRO	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Así pues; y teniendo en cuenta las propiedades 1ª y 2ª, se verificará que:

a) El poliedro conjugado del tetraedro regular, tendrá 4 vértices y por consiguiente será un TETRAEDRO REGULAR.

b) El poliedro conjugado del exaedro regular, tendrá 6 vértices y por consiguiente será un OCTAEDRO REGULAR.

c) El poliedro conjugado del octaedro regular, tendrá 8 vértices y por consiguiente será un EXAEDRO REGULAR.

d) El poliedro conjugado del dodecaedro regular, ten-



drá 12 vértices y por consiguiente será un ICOSAEDRO REGULAR.

e) El poliedro conjugado del icosaedro regular, tendrá 20 vértices y por consiguiente será un DODECAEDRO REGULAR.

De lo expuesto se deduce que el exaedro y octaedro regulares son mutuamente conjugados (cada uno lo es del otro). Igualmente son mutuamente conjugados el dodecaedro e icosaedro regulares. El tetraedro regular es conjugado de sí mismo.

En las láminas 6 al 10 estudiaremos la representación de estos poliedros conjugados, así como el estudio analítico de las magnitudes del conjugado en función de las del poliedro dado.

UNE A4 210 X 297



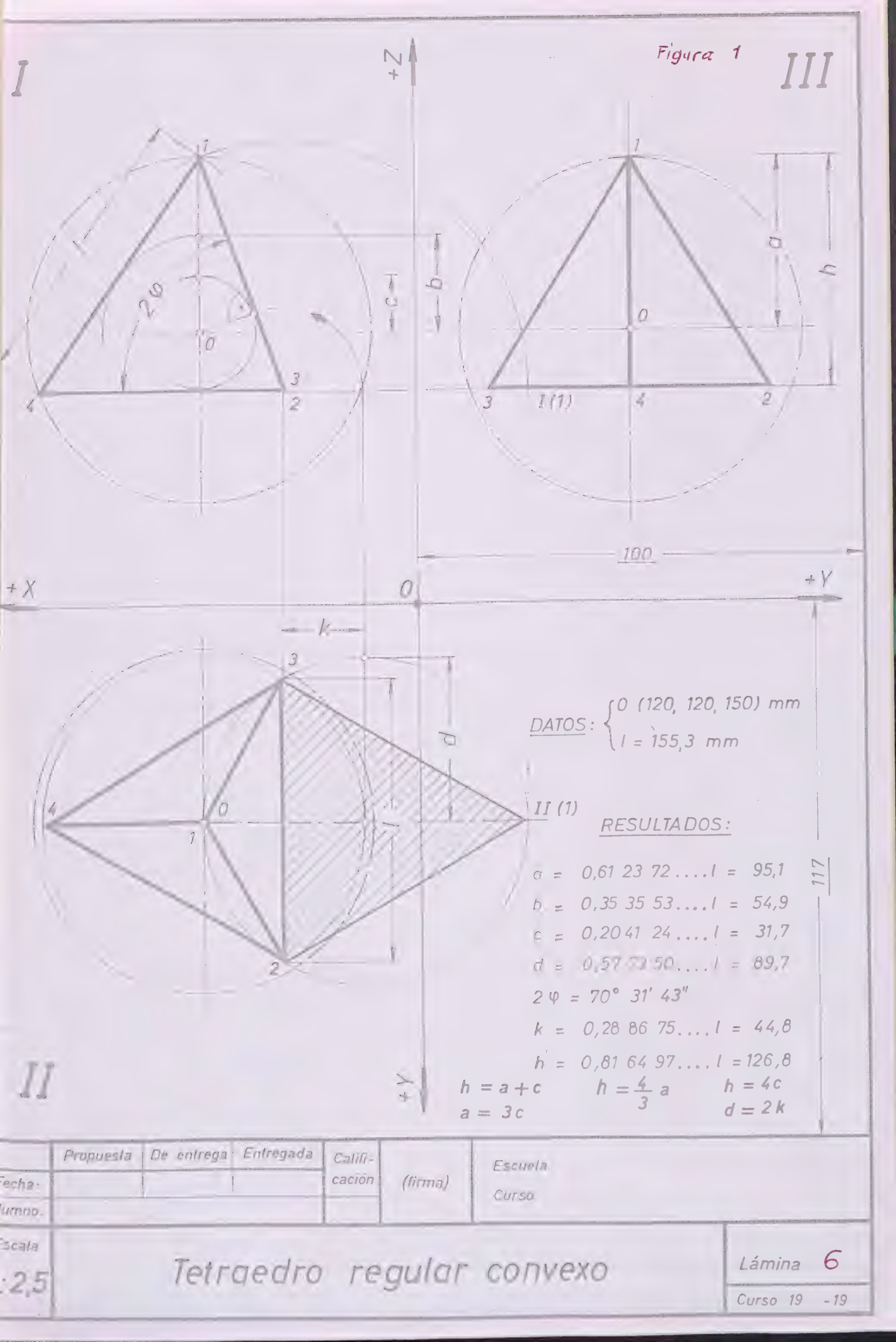


Figura 1
I
III
II
+Z
+X
+Y
O
100
117
k
d
a
b
c
h
l
2φ
DATOS: { O (120, 120, 150) mm
l = 155,3 mm
II (1)
I (1)
RESULTADOS:
a = 0,61 23 72 ....l = 95,1
b = 0,35 35 53 ....l = 54,9
c = 0,20 41 24 ....l = 31,7
d = 0,57 73 50 ....l = 89,7
2φ = 70° 31' 43"
k = 0,28 86 75 ....l = 44,8
h = 0,81 64 97 ....l = 126,8
h = a + c
a = 3c
h = 4/3 a
h = 4c
d = 2k
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Escuela
Curso
Fecha:
Alumno:
Escala
1:2,5
Tetraedro regular convexo
Lámina 6
Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del tetraedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lám. 1); el lado ℓ será:

$$\ell_4 = \frac{55}{0,61\ 23\ 72..} = 89,81\ 46\ 88 \simeq 89,8 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el tetraedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 1. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del tetraedro conjugado se hará uniendo los centros de las caras del tetraedro primitivo, los cuales están situados en el espacio, en el baricentro de sus caras respectivas (punto de intersección de las medianas); como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III, las proyecciones de los centros de las caras, vértices del poliedro pedido.

El trazado puede simplificarse teniendo presente que el baricentro de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de su longitud a partir del vértice correspondiente.

Una comprobación de este trazado es la correspon-

UNE A4 210 X 297



dencia de las proyecciones de los vértices del tetraedro al obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

Este trazado es laborioso y falto de precisión, por lo que es conveniente simplificarlo con el proceso gráfico-analítico.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente en la forma que a continuación exponemos.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el tetraedro dado, es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al tetraedro dado, que será el de la circunscrita del tetraedro conjugado.

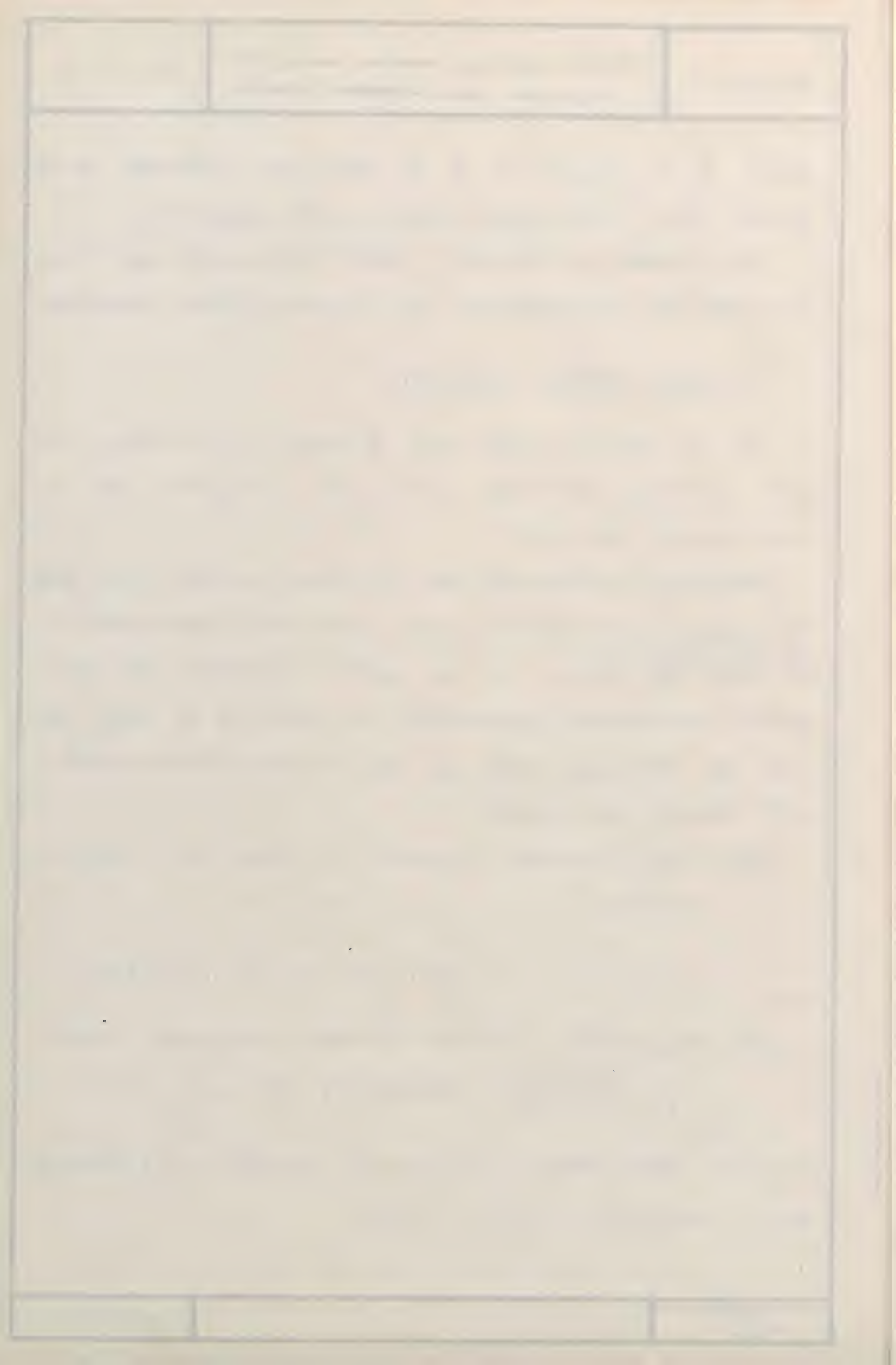
Así pues, teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 1ª, se verificará:

$$c_4 = a'_4 = 0,20\ 41\ 24 \times 89,81\ 46\ 88 = 18,33\ 33\ 34 \cong 18,3 \text{ mm.}$$

y por consiguiente el lado del Tetraedro conjugado valdrá:

$$l'_4 = \frac{18,33\ 33\ 34}{0,61\ 23\ 72} = 29,93\ 82\ 30 \cong 29,9 \text{ mm}$$

con cuyo valor podemos calcular los restantes de este tetraedro que se expresan a continuación:



$a'_4 = 0{,}61\ 23\ 72 \times 29{,}93\ 22\ 30 = 18{,}3$ mm

$b'_4 = 0{,}35\ 35\ 53 \times$ id. $= 10{,}6$ "

$c'_4 = 0{,}20\ 41\ 24 \times$ id. $= 6{,}1$ "

$d'_4 = 0{,}57\ 73\ 50 \times$ id. $= 17{,}3$ "

$2\varphi = 70°\ 31'\ 43''$

$k'_4 = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id. $= 8{,}6$ "

$h'_4 = 0{,}81\ 64\ 97 \times$ id. $= 24{,}4$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$h'_4 = a'_4 + c'_4 = 24{,}4 = 18{,}3 + 6{,}1$ $\qquad h'_4 = \frac{4}{3} a = \frac{4 \times 18{,}3}{3} = 24{,}4$ mm

$h'_4 = 4c'_4 = 24{,}4 = 4 \times 6{,}1$ $\qquad a'_4 = 3c'_4 = 18{,}3 = 3 \times 6{,}1$

$$d'_4 = 2k'_4 = 17{,}3 = 2 \times 8{,}6$$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al tetraedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita a un mismo tetraedro. Estos valores son:

$$a_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_4 \qquad c_4 = \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_4}{a'_4} = \frac{a_4}{c_4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_4 : \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4 = 3 \qquad [1]$$

El lado l'_4 del tetraedro conjugado, en función del la-



do l_4 dado, será pues

$$a_4 = \frac{\sqrt{6}}{4} l_4 \; ; \qquad c_4 = a'_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} l_4$$ de donde

$$l'_4 = a'_4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{12} l_4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{3} l_4 \qquad [2]$$

y la relación entre los lados de ambos poliedros sigue siendo

$$\frac{l_4}{l'_4} = 3 \qquad [3]$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el tetraedro conjugado por acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de 29,9 mm de lado, situado interiormente en otro tetraedro regular formado por 4 caras triangulares (transparentes) de 89,8 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_4 = Lado del tetraedro conjugado.

a'_4 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_4 = Radio de la esfera tangente a las aristas del id.

c'_4 = Radio de la esfera inscrita al id.



d'_4 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara del id.

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas del id.

k'_4 = Apotema del polígono de una cara del id.

h'_4 = Altura del tetraedro id.

S'_4 = Superficie del id.

V'_4 = Volumen del id.

Los valores anteriores del tetraedro conjugado pueden obtenerse directamente en función del lado $\underline{l_4}$ del tetraedro dado, ya que conocemos la razón de semejanza de ambos.

Así pues, las magnitudes lineales serán $\frac{1}{3}$ de las del dado; las superficiales serán $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ de las del dado, y las volumétricas serán $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ de las del mencionado tetraedro dado.

Tomando los valores del cuadro sinóptico de la lámina 1, para el tetraedro dado, se obtendrían los correspondientes al tetraedro conjugado en función de l_4 que resumimos en el cuadro siguiente.



CUADRO SINÓPTICO

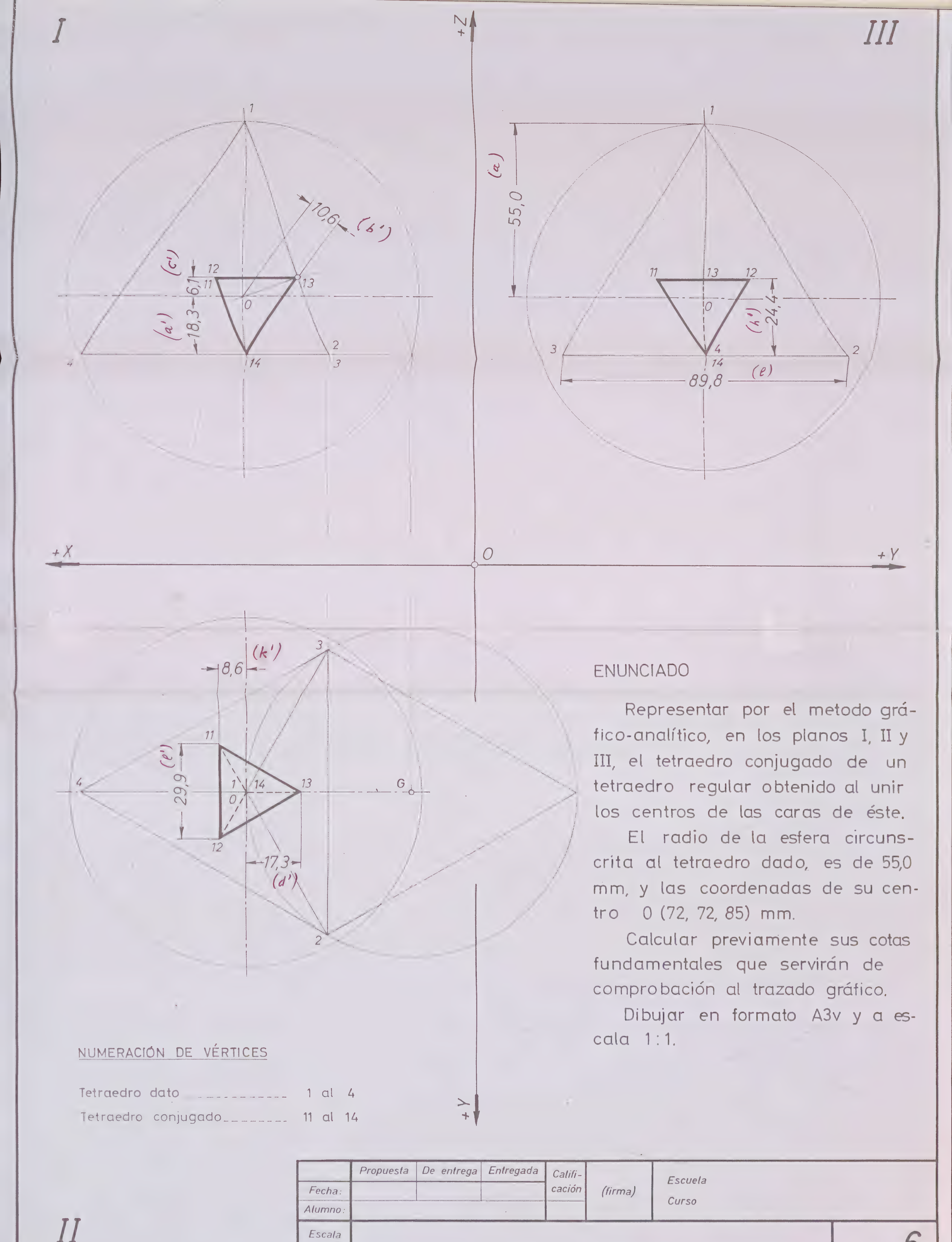
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l'_4	(56) $\frac{1}{3}\, l_4$	$0.33\,33\,33\ldots\, l_4$
a'_4	(57) $\frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4$	$0,20\,41\,24\ldots\, l_4$
b'_4	(58) $\frac{\sqrt{2}}{12}\, l_4$	$0,11\,78\,51\ldots\, l_4$
c'_4	(59) $\frac{\sqrt{6}}{36}\, l_4$	$0,06\,80\,41\ldots\, l_4$
d'_4	(60) $\frac{\sqrt{3}}{9}\, l_4$	$0,19\,24\,50\ldots\, l_4$
2φ	(61) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0,57\,73\,50\ldots$ $2\varphi = 70^\circ\, 31'\, 43.4''$
k'_4	(62) $\frac{\sqrt{3}}{18}\, l_4$	$0,09\,62\,25\ldots\, l_4$
h'_4	(63) $\frac{\sqrt{6}}{9}\, l_4$	$0,27\,31\,66\ldots\, l_4$
S'_4	(64) $\frac{\sqrt{3}}{9}\, l_4^2$	$0,19\,24\,50\ldots\, l_4^2$
V'_4	(65) $\frac{\sqrt{2}}{324}\, l_4^3$	$0.00\,43\,65\ldots\, l_4^2$

(66) Relaciones entre magnitudes

$l_4 : l'_4 = 3 \qquad S_4 : S'_4 = 9 \qquad V_4 : V'_4 = 27$

UNE A4 210 X 297





ENUNCIADO

Representar por el metodo gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

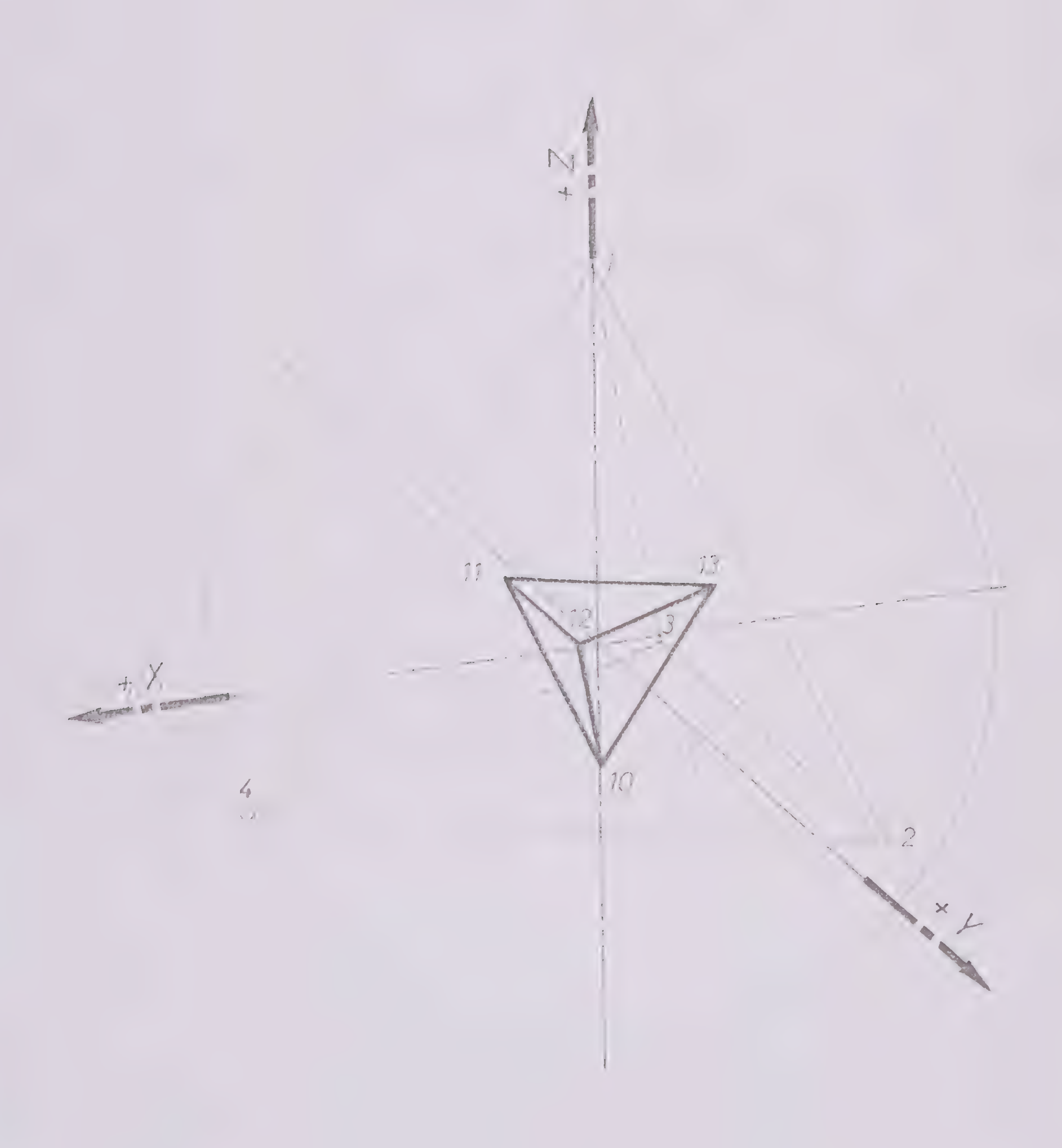
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato .... 1 al 4

Tetraedro conjugado .... 11 al 14

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 6 — Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 7	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS A) Centros de caras	7

Lámina 7

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al exaedro dado es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

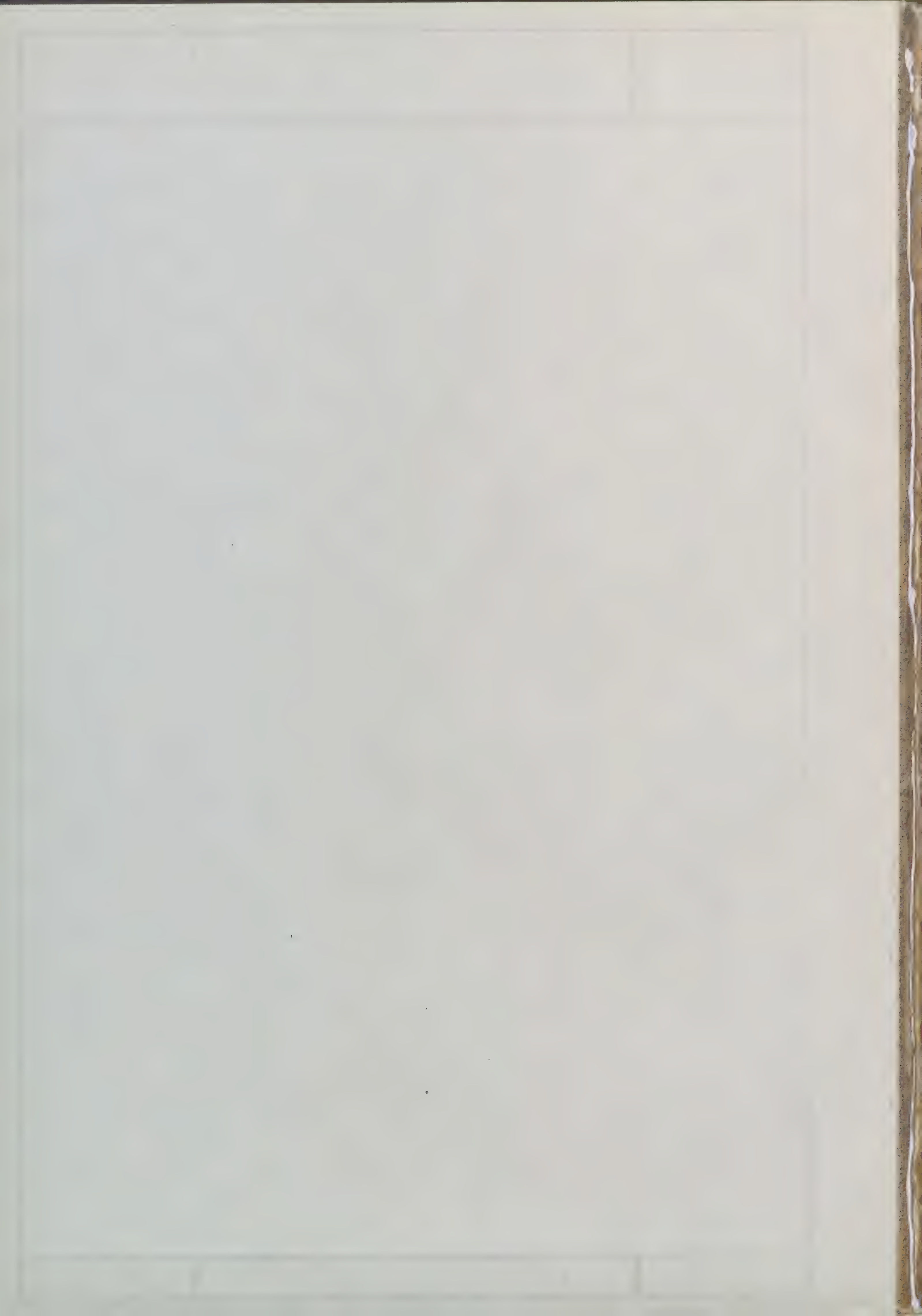
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS $\quad O\ (72,\ 72,\ 85)$ mm

$a_6 = 55{,}0$ mm

UNE A4 210 X 297

[signature]		29 - 2 - 72



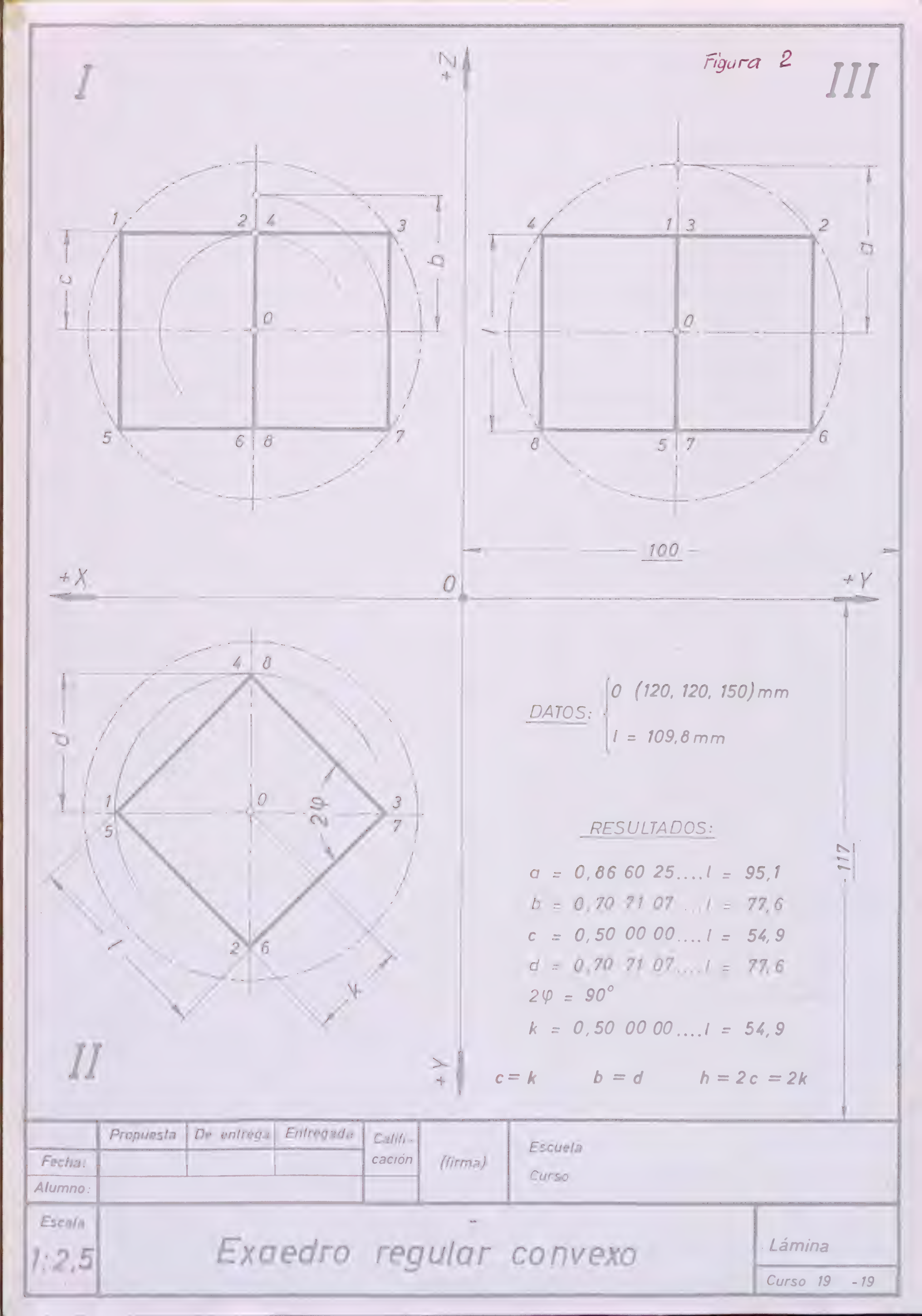


Figura 2
I
III
II
+Z
+X
+Y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
a
b
c
d
l
k
2φ
100
117
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 109,8 mm
RESULTADOS:
a = 0,86 60 25....l = 95,1
b = 0,70 71 07 ....l = 77,6
c = 0,50 00 00....l = 54,9
d = 0,70 71 07....l = 77,6
2φ = 90°
k = 0,50 00 00....l = 54,9
c = k   b = d   h = 2c = 2k
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Escuela
Curso
Fecha:
Alumno:
Escala
1:2,5
Exaedro regular convexo
Lámina
Curso 19 -19

Lámina 7	Poliedros regulares convexos conjugados Conjugado del EXAEDRO REGULAR	Hoja nº 1

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del exaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lámina 2); el lado l será:

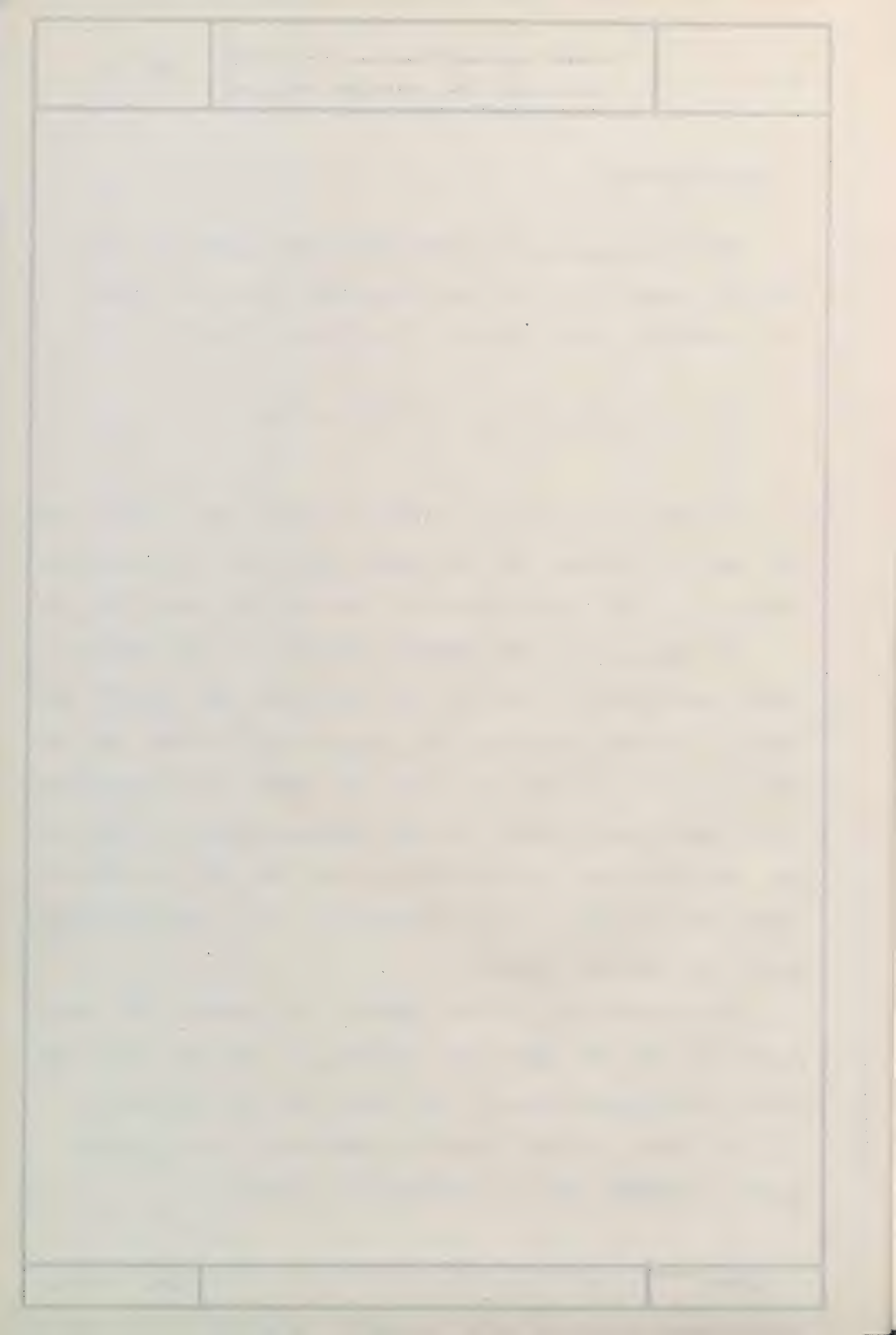
$$l_6 = \frac{55}{0,866025} = 63,508560 \simeq 63,5 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el exaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 2. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del octaedro conjugado se hará determinando previamente los centros de cada cara del exaedro primitivo, teniendo presente que las proyecciones de cada uno de ellos son a su vez centros de los rectángulos o cuadrados de las caras proyectadas. Uniendo adecuadamente las proyecciones de estos centros se obtendrá en cada uno de los planos coordenados I, II y III, la representación del octaedro conjugado del exaedro dado.

Una comprobación de este trazado es la verificar la correspondencia de las proyecciones del centro de cada cara, obtenidas independientemente en cada plano de proyección.

El trazado anterior puede simplificarse con el proceso gráfico-analítico que a continuación exponemos.



PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente de la forma siguiente.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el exaedro dado, es concéntrica con la circunscrita, (siendo aquélla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente, calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al exaedro dado, que será la circunscrita al octaedro conjugado.

Así pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 2ª, se verificará:

$$c_6 = a'_8 = 0.5 \times 63.50\,85\,60 = 31,75\,42\,80 \cong 31,75 \text{ mm.}$$

y por consiguiente, el lado del octaedro conjugado, valdrá: (ver figura 3ª)

$$l'_8 = \frac{31.75\,42\,80}{0,70\,71\,07} = 44,90\,73\,19 \cong 44,9 \text{ mm}$$

con cuyo valor, y de acuerdo con la tabla de la figura 3ª, podemos calcular los restantes del octaedro que se expresan a continuación:

$$a'_8 = 0.70\,71\,07 \times 44,90\,73\,19 = 31,8 \text{ mm}$$

$$b'_8 = 0,50\,00\,00 \times \text{id} = 22,45 \text{ "}$$

$$c'_8 = 0,40\,82\,48 \times \text{id} = 18,3 \text{ "}$$

$$d'_8 = 0,57\,73\,50 \times \text{id} = 25,9 \text{ "}$$

$$2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16''$$

UNE A4 210 X 297



$$k'_8 = 0,28\ 86\ 75 \times 44,90\ 73\ 19 = 13,0 \text{ mm.}$$

con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$d'_8 = 2k'_8 \quad 25,9 = 2 \times 13,0$ $\qquad l'_8 = 2b'_8 \quad 44,9 = 2 \times 22,45$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al exaedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita al exaedro dado, cuyos valores son:

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 \qquad c_6 = \frac{1}{2}\, l_6$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_6}{a'_8} = \frac{a_6}{c_6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 : \frac{1}{2}\, l_6 = \sqrt{3} = 1,73\ 20\ 51 \ldots \qquad [1]$$

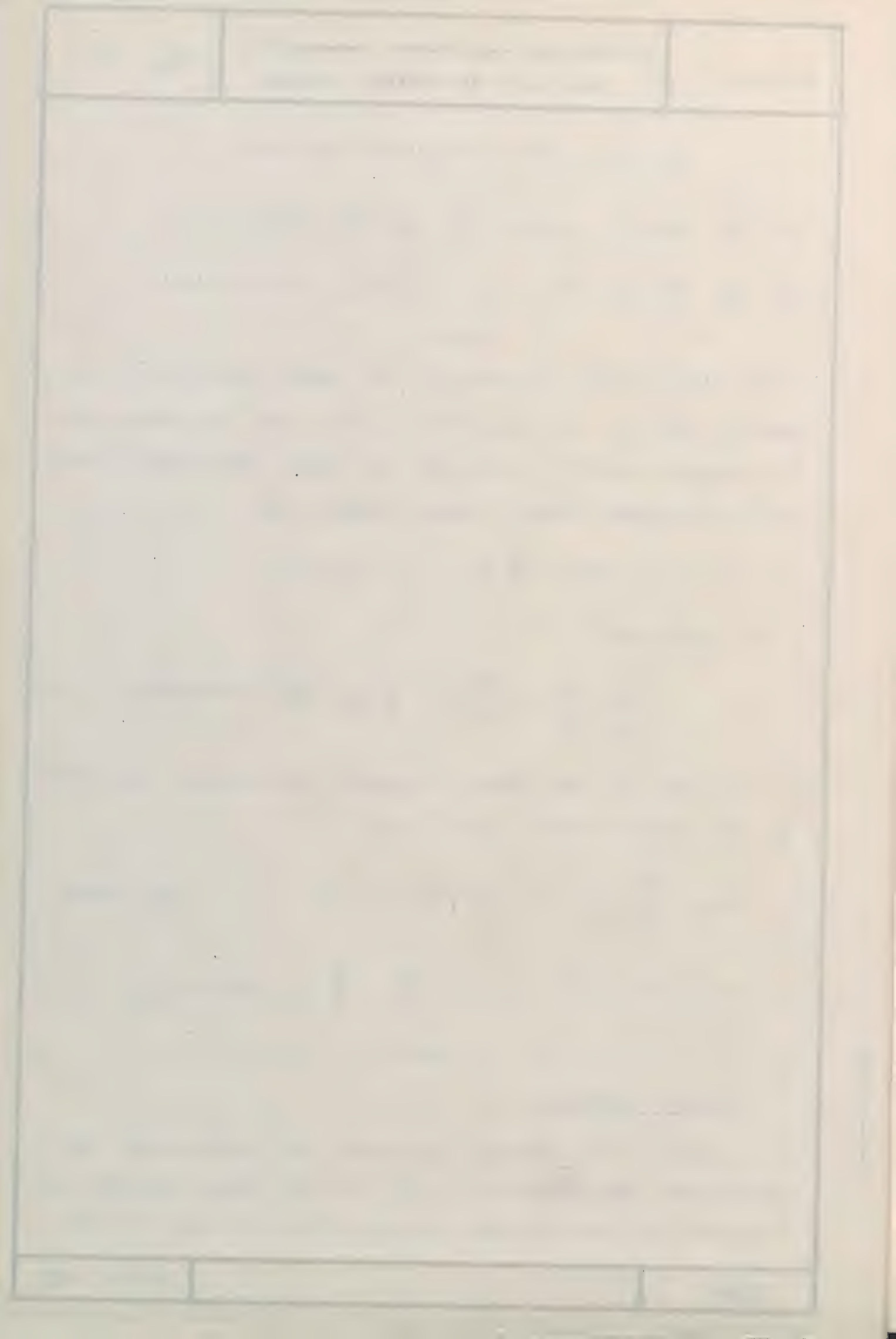
El lado l'_8 del octaedro conjugado, en función del lado l_6 del exaedro dado, será pues

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 \qquad c_6 = a'_8 = \frac{1}{2}\, l_6 \qquad \text{de donde}$$

$$l'_8 = a'_8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\, l_6 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = 0,70\ 71\ 07 \ldots l_6 \qquad [2]$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el octaedro conjugado por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de 44,9 mm de lado, situados interiormente en un exaedro regular formado por 6 caras



cuadrados (transparentes) de 63,5 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_8 = Lado del octaedro conjugado

a'_8 = Radio de la esfera circunscrita al mismo

b'_8 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_8 = Radio de la esfera inscrita

d'_8 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara

$2\varphi_8$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

k'_8 = Apotema del polígono de una cara.

S'_8 = Superficie.

V'_8 = Volumen.

Los valores anteriores del octaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_6 del exaedro dado, ya que el valor conocido de l'_8 en función de l_6 (ver fórmula [2]), es

$$l'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l_6$$



Sustituyendo este valor en las fórmulas 21 a 28 de la lámina 3, tendremos:

$$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{1}{2} l_6 \, ; \qquad b'_8 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{2}}{4} l_6 \, ;$$

$$c'_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{12}}{12} l_6 = \frac{2\sqrt{3}}{12} l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_6 \, ; \qquad d'_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} l_6 \, ; \qquad k'_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \frac{\sqrt{6}}{12} l_6 \, ; \qquad S'_8 = 2\sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l_6\right)^2 =$$

$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} l_6^{\,2} = \sqrt{3} \, l_6^{\,2} \, ; \qquad V'_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} l_6\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{8} l_6^{\,3} =$$

$$= \frac{4}{24} l_6^{\,3} = \frac{1}{6} l_6^{\,3}.$$

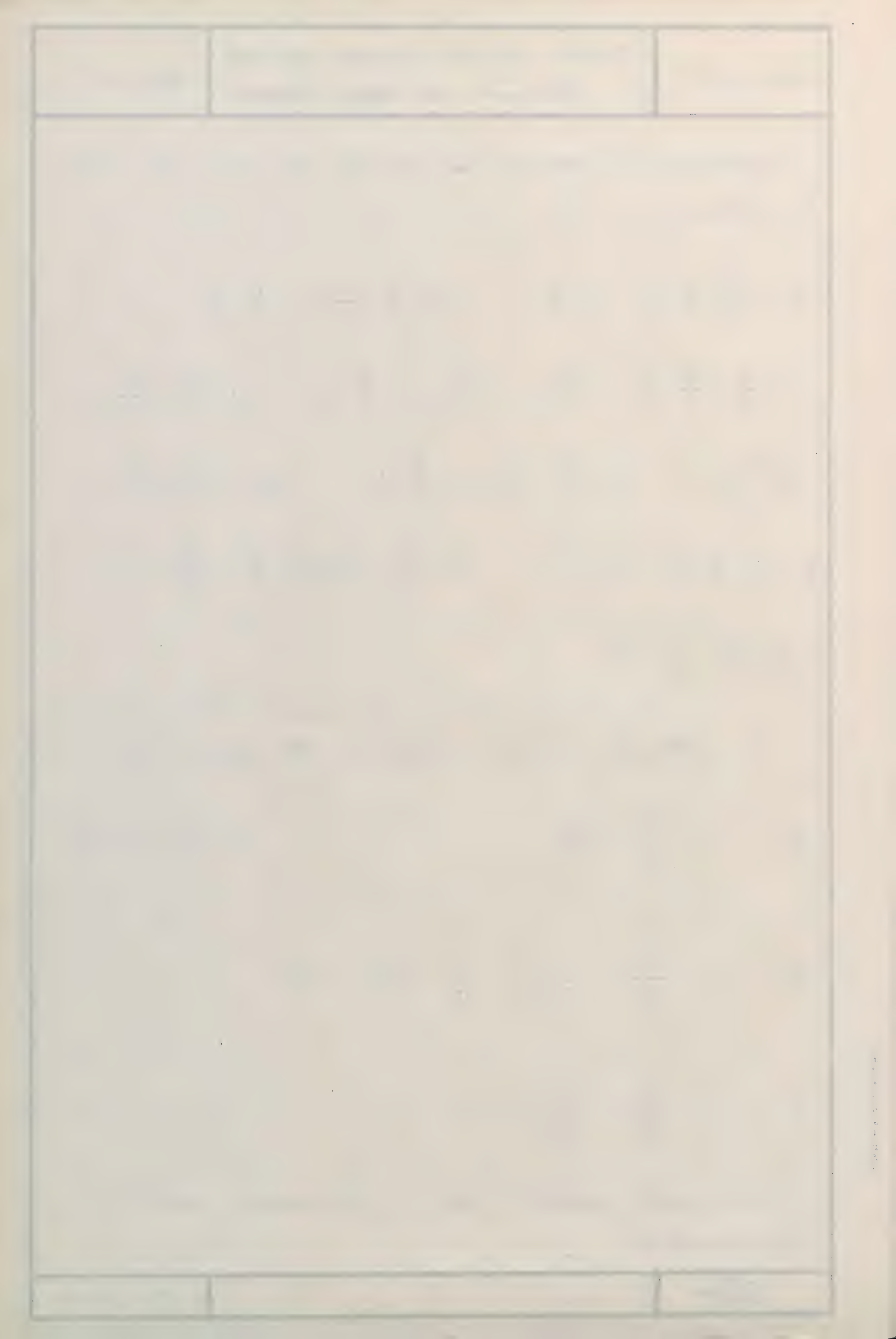
Son útiles las siguientes relaciones de magnitudes:

a) $$\frac{l_6}{l'_8} = \sqrt{2}$$ (ver fórmula [2])

b) $$\frac{S_6}{S'_8} = \frac{6 \, l_6^{\,2}}{\sqrt{3} \, l_6^{\,2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

c) $$\frac{V_6}{V'_8} = \frac{l_6^{\,3}}{\frac{1}{6} l_6^{\,3}} = 6$$

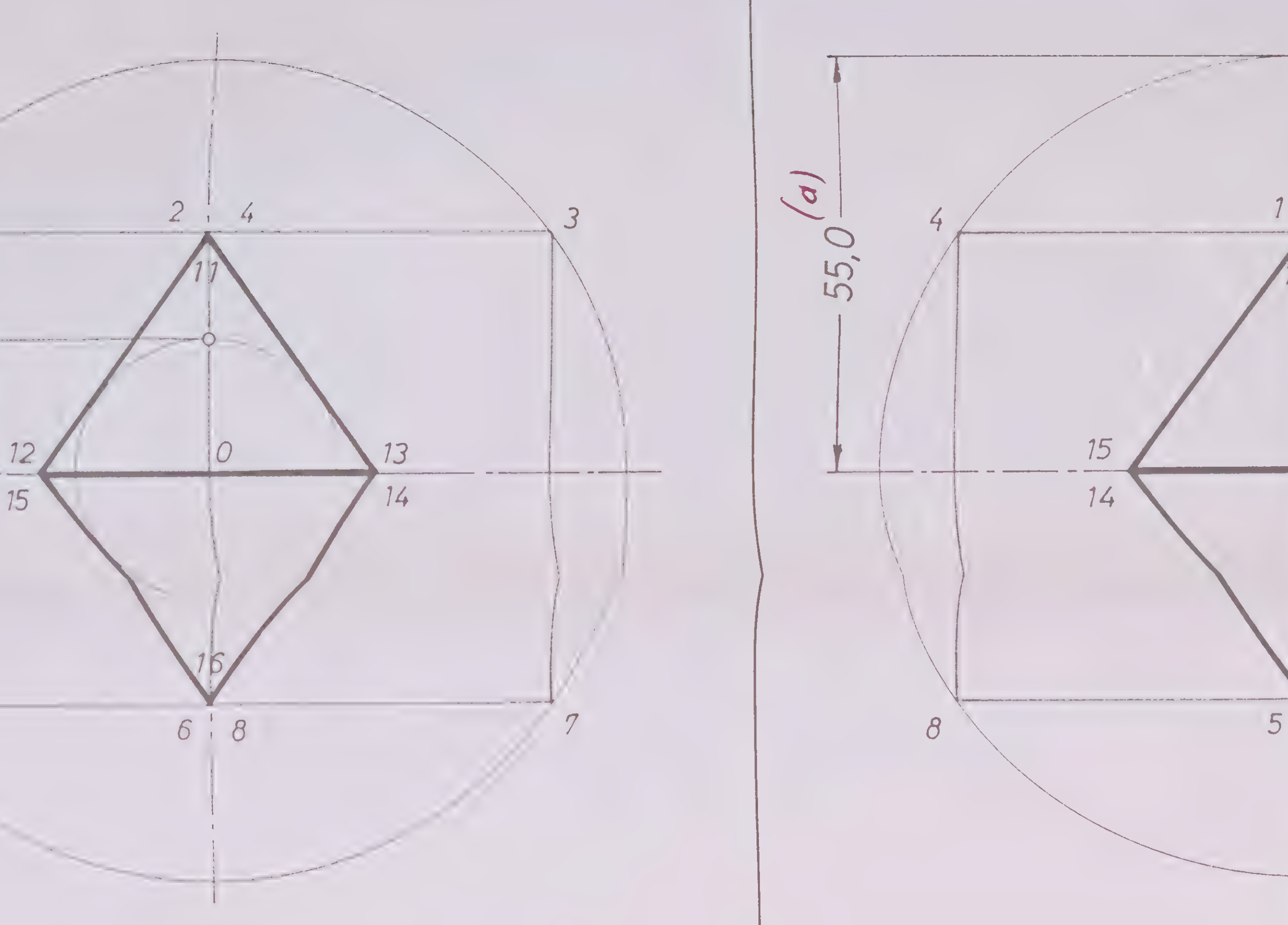
En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados.

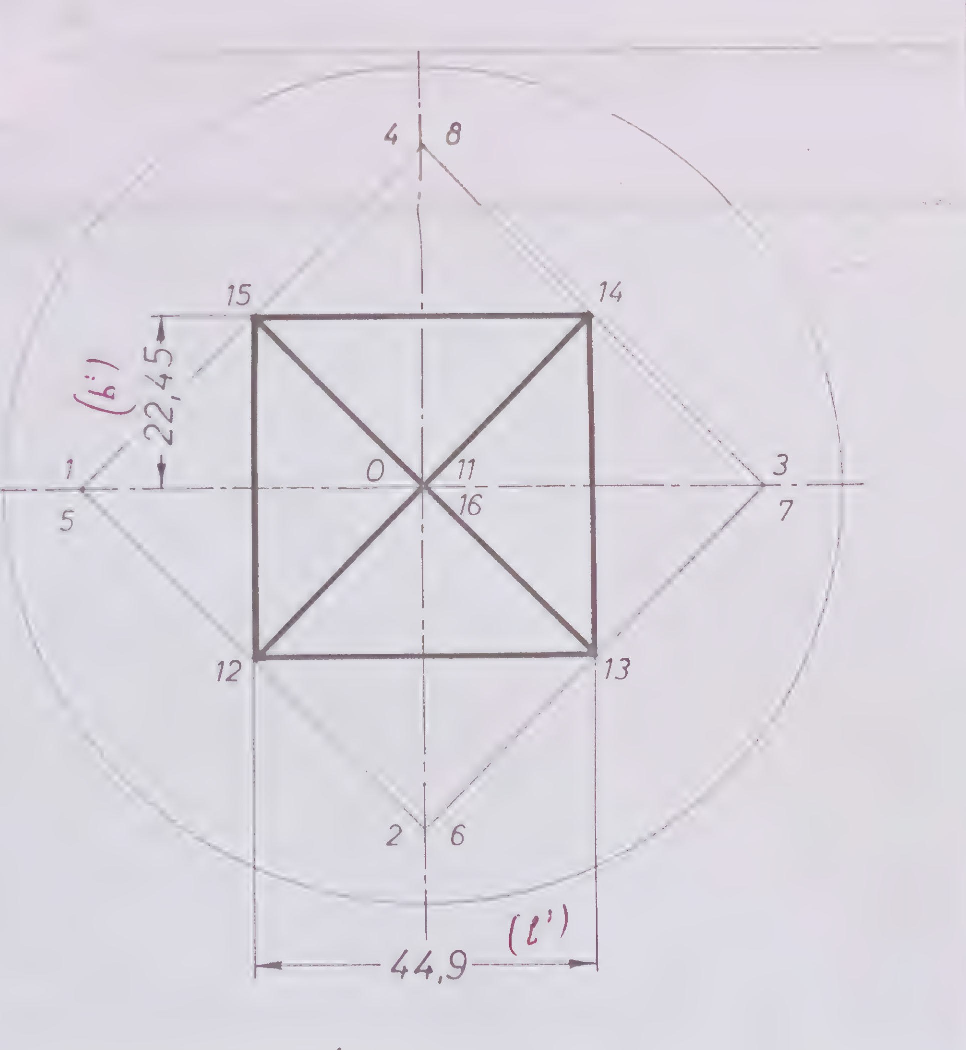


CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
l'_8	(67) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ l_6$	$0,70\ 71\ 07\ldots\ l_6$	+
a'_8	(68) $\frac{1}{2}\ l_6$	$0,50\ 00\ 00\ldots\ l_6$	–
b'_8	(69) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_6$	$0,35\ 35\ 53\ldots\ l_6$	+
c'_8	(70) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ l_6$	$0,28\ 86\ 75\ldots\ l_6$	+
d'_8	(71) $\frac{\sqrt{6}}{6}\ l_6$	$0,40\ 82\ 48\ldots\ l_6$	+
$2\varphi_8$	(72) $\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\text{sen}\ \varphi = 0,81\ 64\ 97\ldots$ $2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16,6''$	+
k'_8	(73) $\frac{\sqrt{6}}{12}\ l_6$	$0,20\ 41\ 24\ldots\ l_6$	+
S'_8	(74) $\sqrt{3}\ l_6^2$	$1,73\ 20\ 51\ldots\ l_6^2$	+
V'_8	(75) $\frac{1}{6}\ l_6^3$	$0,16\ 66\ 67\ldots\ l_6^3$	–
(76) Relaciones entre magnitudes			
$l_6 : l'_8$	(77) $\sqrt{2}$	$1,41\ 42\ 14\ldots$	+
$S_6 : S'_8$	(78) $2\sqrt{3}$	$3,46\ 41\ 02\ldots$	+
$V_6 : V'_8$	(79) 6	$6,00\ 00\ 00\ldots$	–







NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro dato .... 1 al 8

Octaedro conjugado .... 11 al 16

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

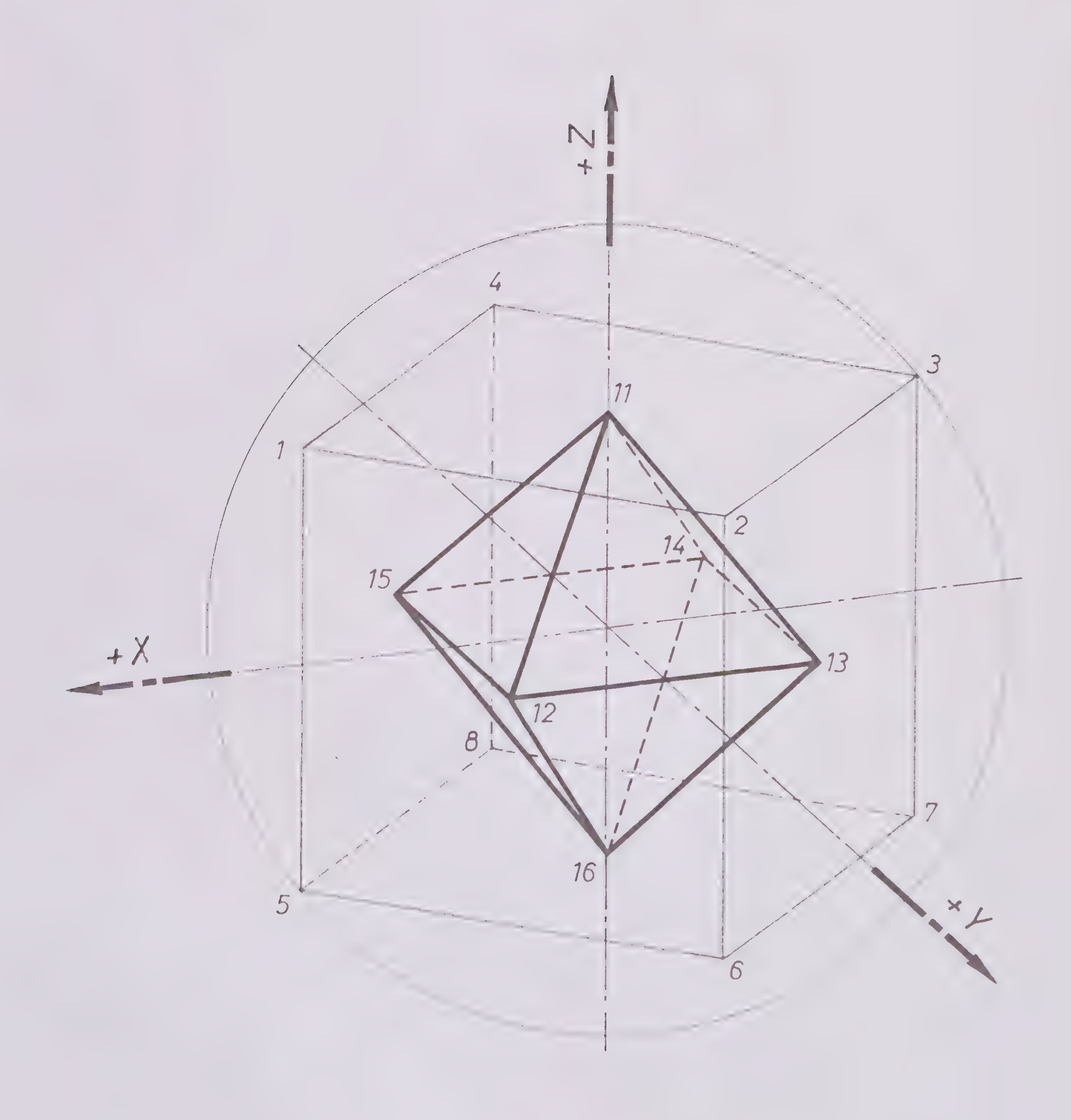
El radio de la esfera circunscrita al exaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 7 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 8

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el exaedro conjugado de un octaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

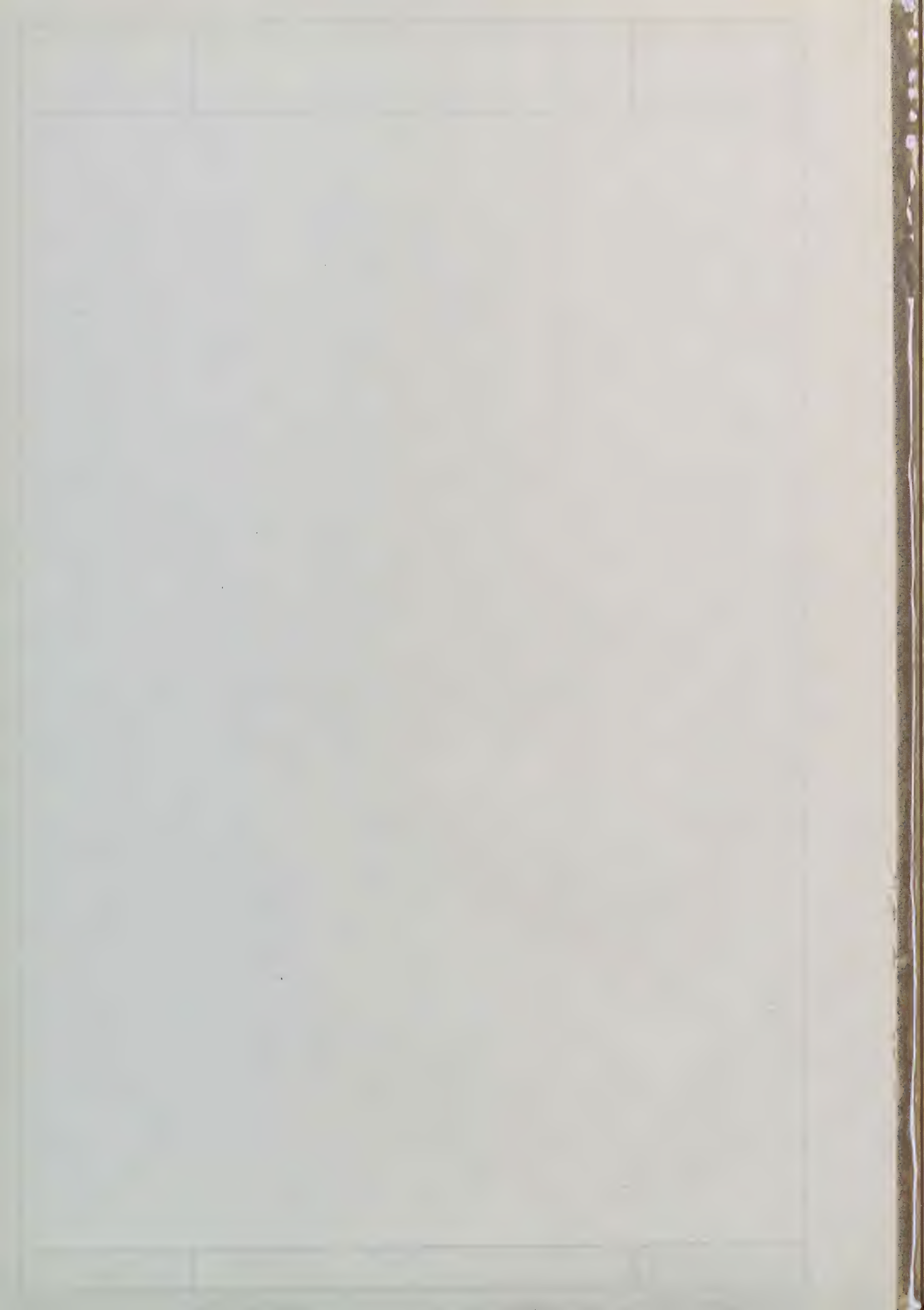
El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

a_8 = 55,0 mm



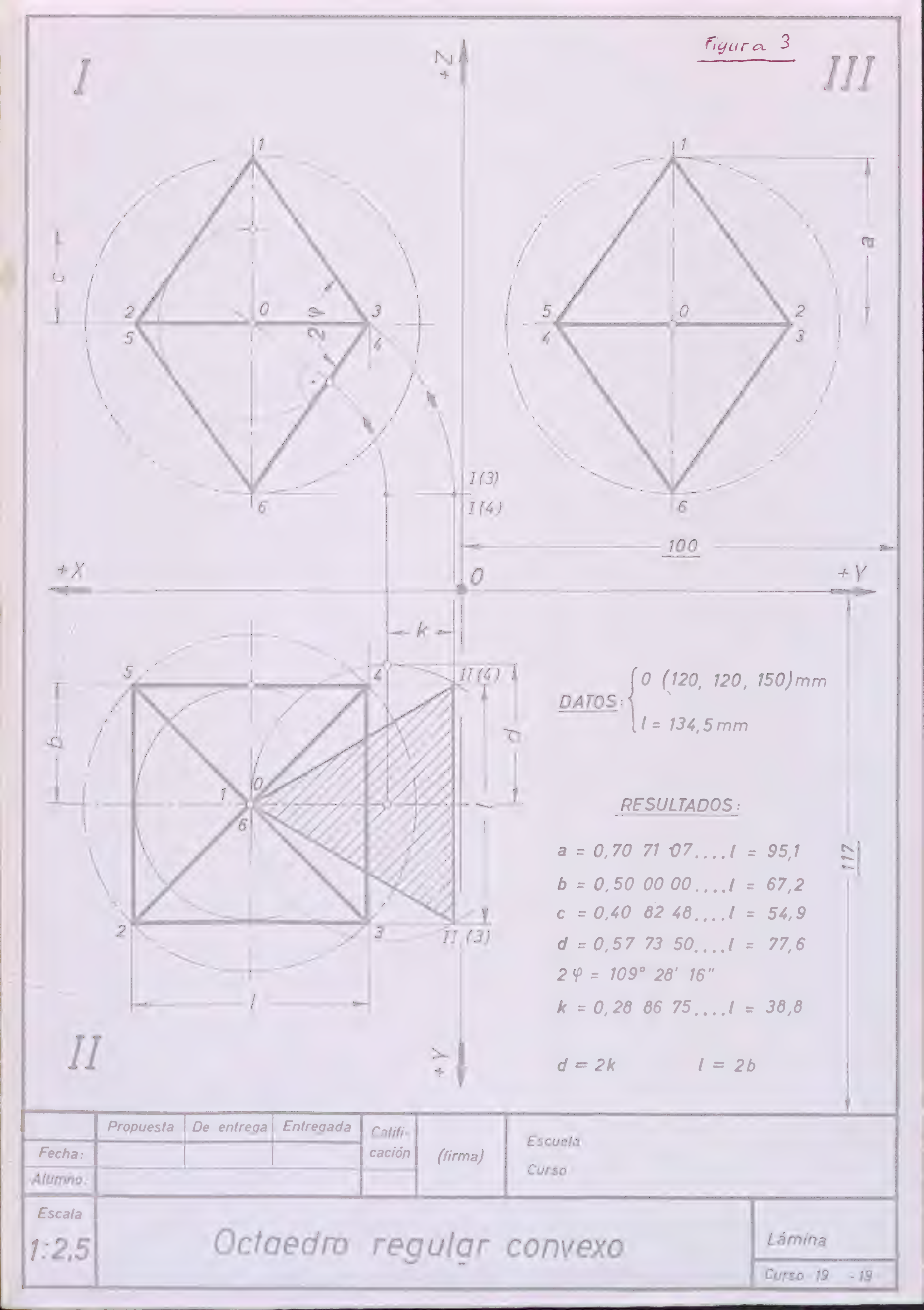


Figura 3
I
II
III
+Z
+X
+Y
0
100
117
I(3)
I(4)
II(4)
II(3)
2φ
k
a
b
c
d
l
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 134,5 mm
RESULTADOS:
a = 0,70 71 07....l = 95,1
b = 0,50 00 00....l = 67,2
c = 0,40 82 48....l = 54,9
d = 0,57 73 50....l = 77,6
2φ = 109° 28' 16"
k = 0,28 86 75....l = 38,8
d = 2k
l = 2b
Propuesta
De entrega
Entregada
Califi-cación
(firma)
Fecha:
Alumno:
Escuela
Curso
Escala
1:2,5
Octaedro regular convexo
Lámina
Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del octaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lámina 3); el lado l será:

$$l_8 = \frac{55}{0{,}70\,71\,07} = 77{,}78\,17\,22 \cong 77{,}8 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el octaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 3. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del exaedro conjugado se efectuará determinando previamente los centros de cada cara del octaedro primitivo, los cuales están situados en el espacio, en el baricentro de sus caras respectivas (puntos de intersección de las medianas); como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III, las proyecciones de los centros de las caras, vértices del poliedro pedido.

Este trazado puede simplificarse teniendo presente que el baricentro de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de su longitud a partir del vértice.

Una comprobación del trazado es la correspondencia de las proyecciones de los vértices del exaedro al obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

La falta de precisión de este trazado, así como su laborio-



su ejecución, puede simplificarse con el proceso gráfico-analítico que a continuación exponemos.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trasado, nos serviremos de cotas analiticas calculadas previamente de la forma siguiente.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el octaedro dado, es concéntrica con la circunscrita, (siendo aquélla a su vez) tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente, calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al octaedro dado, que será la circunscrita al exaedro conjugado.

Así pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 3ª, se verificará:

$$c_8 = a'_6 = 0,40\ 82\ 48 \times 77,78\ 17\ 22 = 31,75\ 42\ 32 \cong 31,8\ mm$$

y por consiguiente, el lado del exaedro conjugado (fig. 2ª), valdrá

$$l'_6 = \frac{31,75\ 42\ 32}{0,86\ 60\ 25} = 36,66\ 66\ 46 \cong 36,7\ mm.$$

con cuyo valor, y de acuerdo con la tabla de la figura 2ª, podemos calcular los restantes del exaedro conjugado que se expresan a continuación:

$$a'_6 = 0,86\ 60\ 25 \times 36,66\ 66\ 46 = 31,8\ mm$$

$$b'_6 = 0,70\ 71\ 07 \times \text{id} = 25,9\ \text{"}$$

$$c'_6 = 0,50\ 00\ 00 \times \text{id} = 18,35\ \text{"}$$

$$d'_6 = 0,70\ 71\ 07 \times \text{id} = 25,9\ \text{"}$$

UNE A4 210 X 297



$2\varphi = 90°$

$k'_6 = 0.50\ 00\ 00 \times 36,66\ 66\ 46 = 18,3$ mm

con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$c'_6 = k'_6 = 18,3$ mm $b'_6 = d'_6 = 25,9$ $h'_6 = 2c'_6 = 2k'_6 = 2 \times 18,35 = 36,7$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al octaedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita al octaedro dado, cuyos valores son:

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 \qquad c_8 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_8}{c_8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 : \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 = \sqrt{3} = 1,73\ 20\ 51... \qquad [1]$$

El lado l'_6 del exaedro conjugado, en función del lado l_8 del octaedro dado, será pues

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 \qquad c_8 = a'_6 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 \quad \text{de donde}$$

$$l'_6 = a'_6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = 0,47\ 14\ 05...\, l_8 \qquad [2]$$

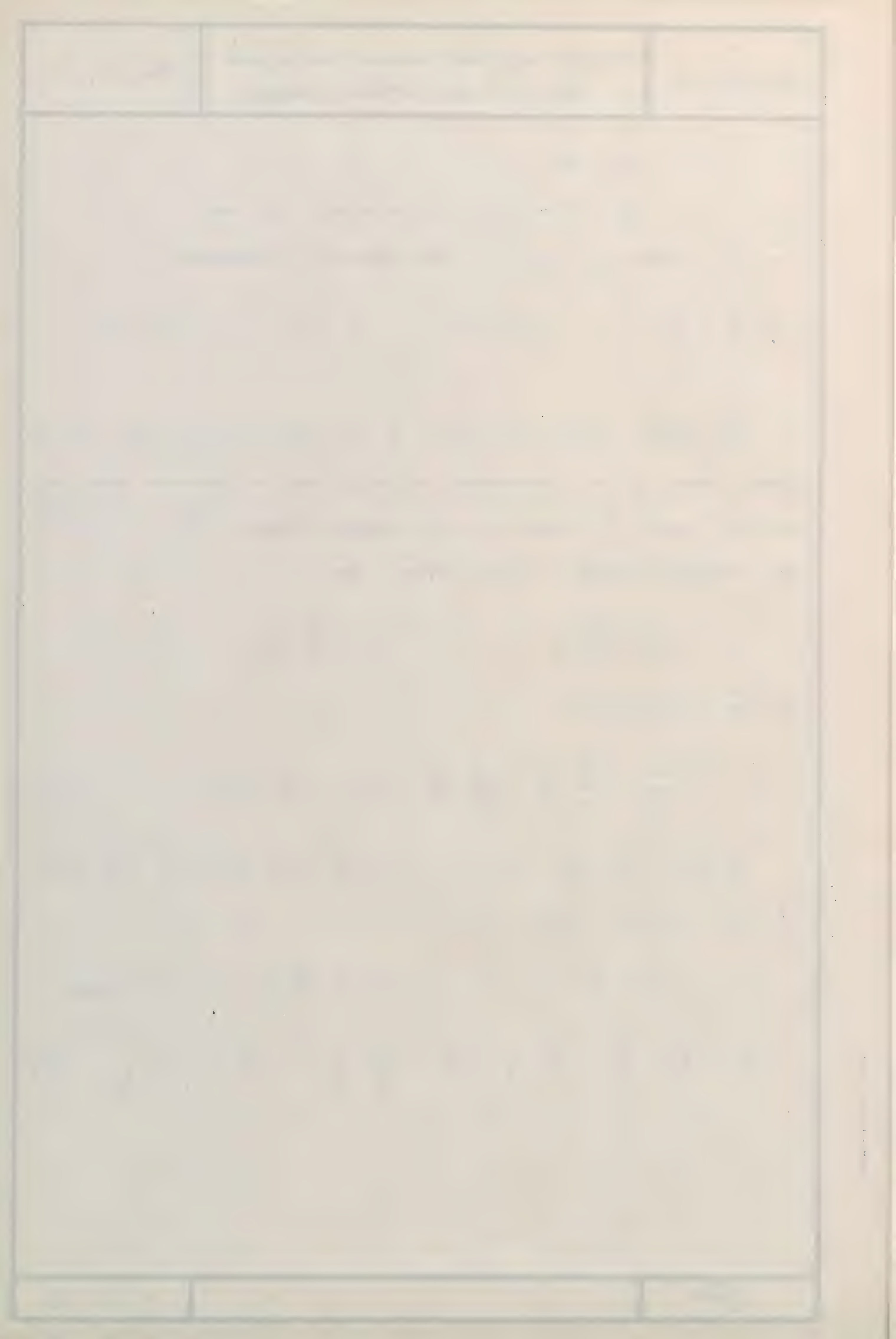


FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el exaedro conjugado por acoplamiento de 6 cuadrados de 36,7 mm de lado, situado interiormente en un octaedro regular formado por 8 caras triangulares (transparentes) de 77,8 mm. de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_6 = Lado del exaedro conjugado

a'_6 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_6 = Radio de la esfera inscrita.

d'_6 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

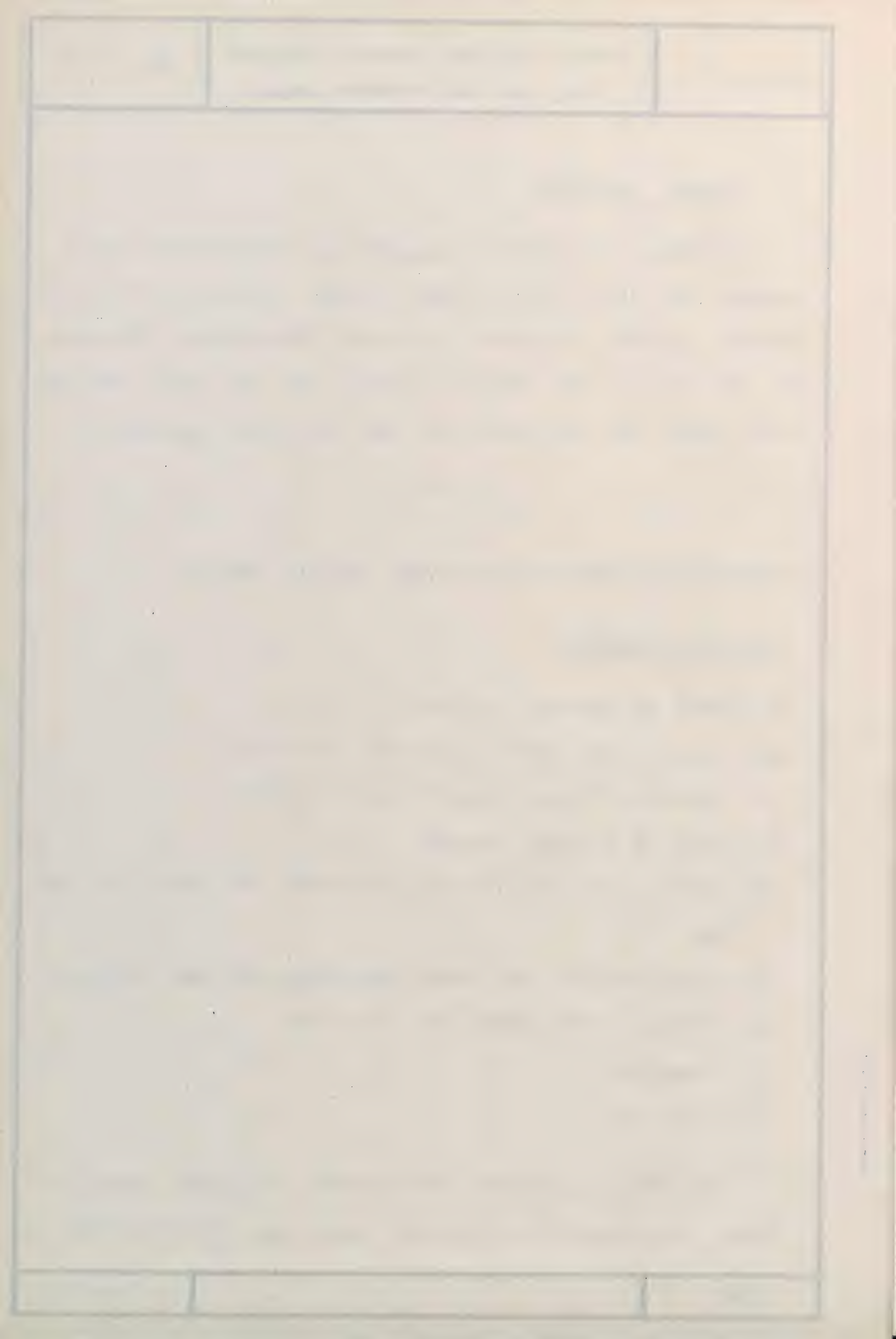
$2\varphi_6$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k'_6 = Apotema del polígono de una cara.

S'_6 = Superficie.

V'_6 = Volumen.

Los valores anteriores del exaedro conjugado pueden obtenerse directamente en función del lado l_8 del octaedro da-



do. ya que el valor conocido de l'_6 en función de l_8 (ver fórmula [2]), es

$$l'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 11 a 19 de la lámina 2, tendremos:

$$a'_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 ; \qquad b'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{1}{3}\, l_8 ;$$

$$c'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{6}\, l_8 ; \qquad d'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{1}{3}\, l_8 ;$$

$$k'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{6}\, l_8 ; \qquad h'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8$$

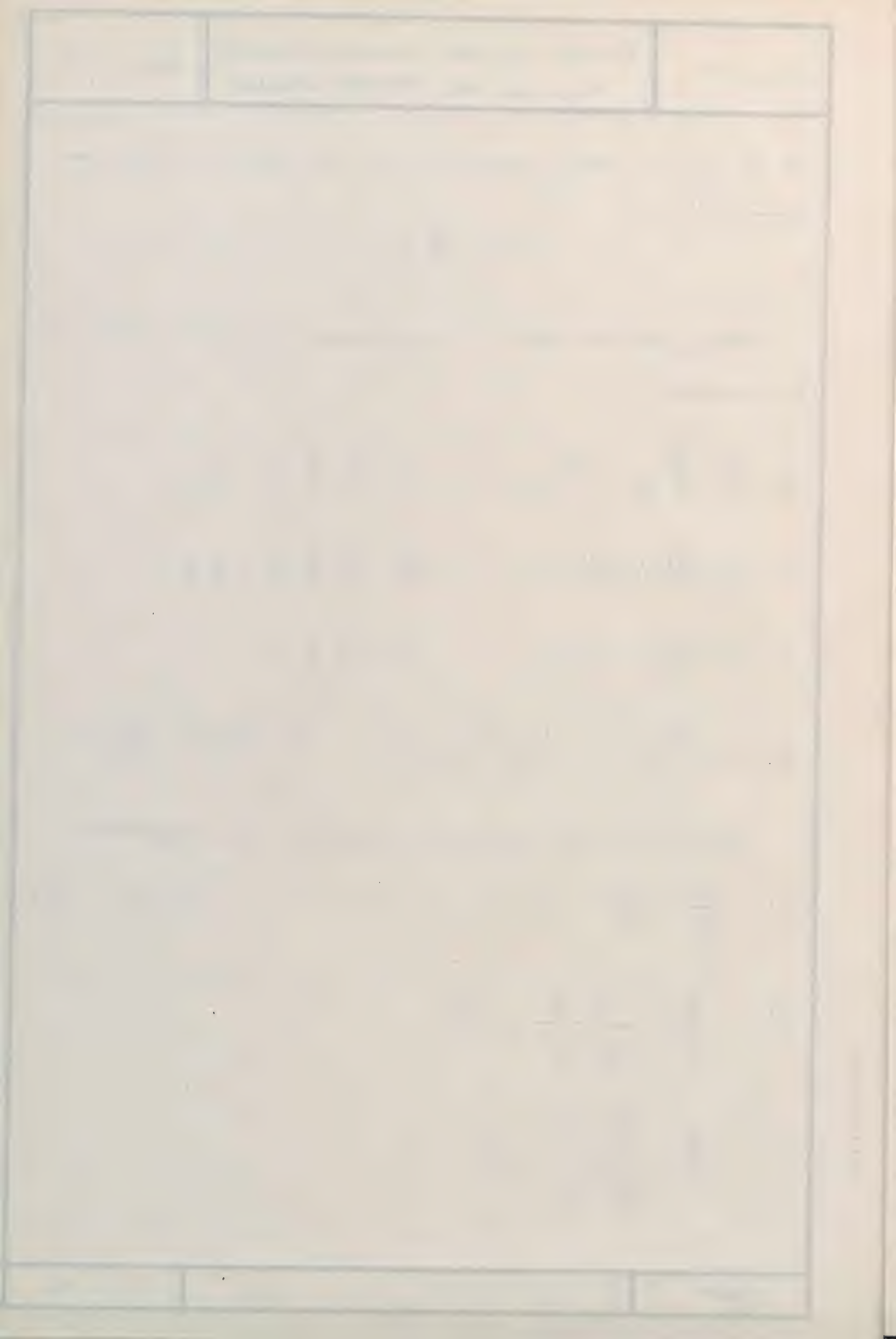
$$S'_6 = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8\right)^2 = 6 \times \frac{2}{9}\, l_8^2 = \frac{4}{3}\, l_8^2 ; \qquad V'_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{27}\, l_8^3$$

Son útiles las siguientes relaciones de magnitudes:

a) $$\frac{l_8}{l'_6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$ (ver fórmula [2])

b) $$\frac{S_8}{S'_6} = \frac{2\sqrt{3}\; l_8^2}{\frac{4}{3}\; l_8^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c) $$\frac{V_8}{V'_6} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\; l_8^3}{\frac{2\sqrt{2}}{27}\; l_8^3} = \frac{9}{2}$$



En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
$l'_6 = h'_6$	(80) $\frac{\sqrt{2}}{3} l_8$	$0,47\ 14\ 05 \ldots l_8$	+
a'_6	(81) $\frac{\sqrt{6}}{6} l_8$	$0,40\ 82\ 48 \ldots l_8$	+
b'_6	(82) $\frac{1}{3} l_8$	$0,33\ 33\ 33 \ldots l_8$	−
c'_6	(83) $\frac{\sqrt{2}}{6} l_8$	$0,23\ 57\ 02 \ldots l_8$	+
d'_6	(84) $\frac{1}{3} l_8$	$0,33\ 33\ 33 \ldots l_8$	−
$2\varphi_6$	(85) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen} \varphi = 0,70\ 71\ 07 \ldots$ $2\varphi = 90°$	+
k'_6	(86) $\frac{\sqrt{2}}{6} l_8$	$0,23\ 57\ 02 \ldots l_8$	+
S'_6	(87) $\frac{4}{3} l_8^2$	$1,33\ 33\ 33 \ldots l_8^2$	−
V'_6	(88) $\frac{2\sqrt{2}}{27} l_8^3$	$0,10\ 47\ 57 \ldots l_8^3$	−
Relaciones entre magnitudes			
$l_8 : l'_6$	(89) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2,12\ 13\ 20 \ldots$	+
$S_8 : S'_6$	(90) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2,59\ 80\ 76 \ldots$	+
$V_8 : V'_6$	(91) $\frac{9}{2}$	$4,50\ 00\ 00 \ldots$	−



Representar en los planos I, II y III, por el método gráfico-analítico, el exaedro regular conjugado de un octaedro regular obtenido al unir los centros de las caras de éste.

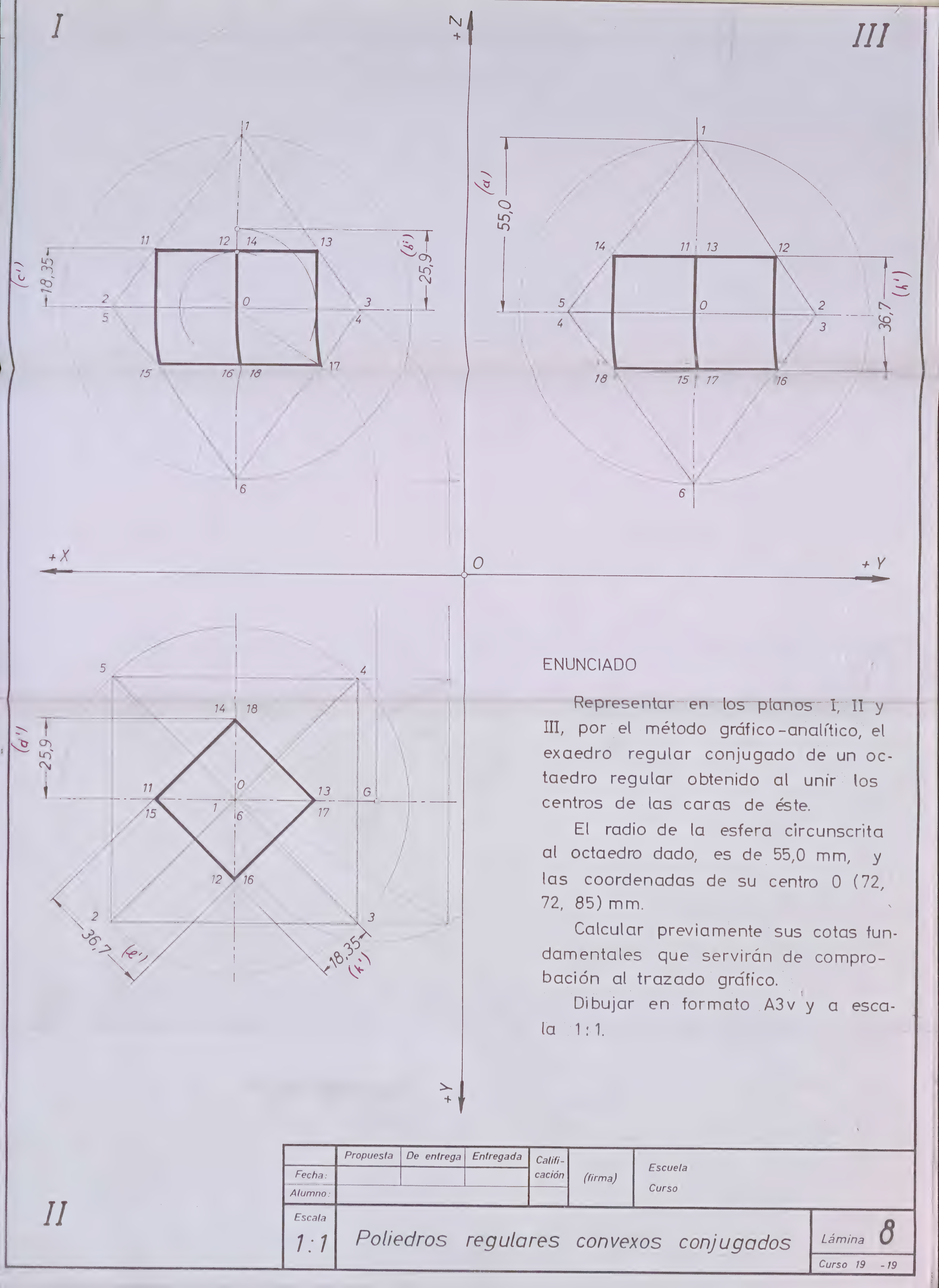
El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 8 Curso 19 -19



ENUNCIADO

Representar en los planos I, II y III, por el método gráfico-analítico, el exaedro regular conjugado de un octaedro regular obtenido al unir los centros de las caras de éste.

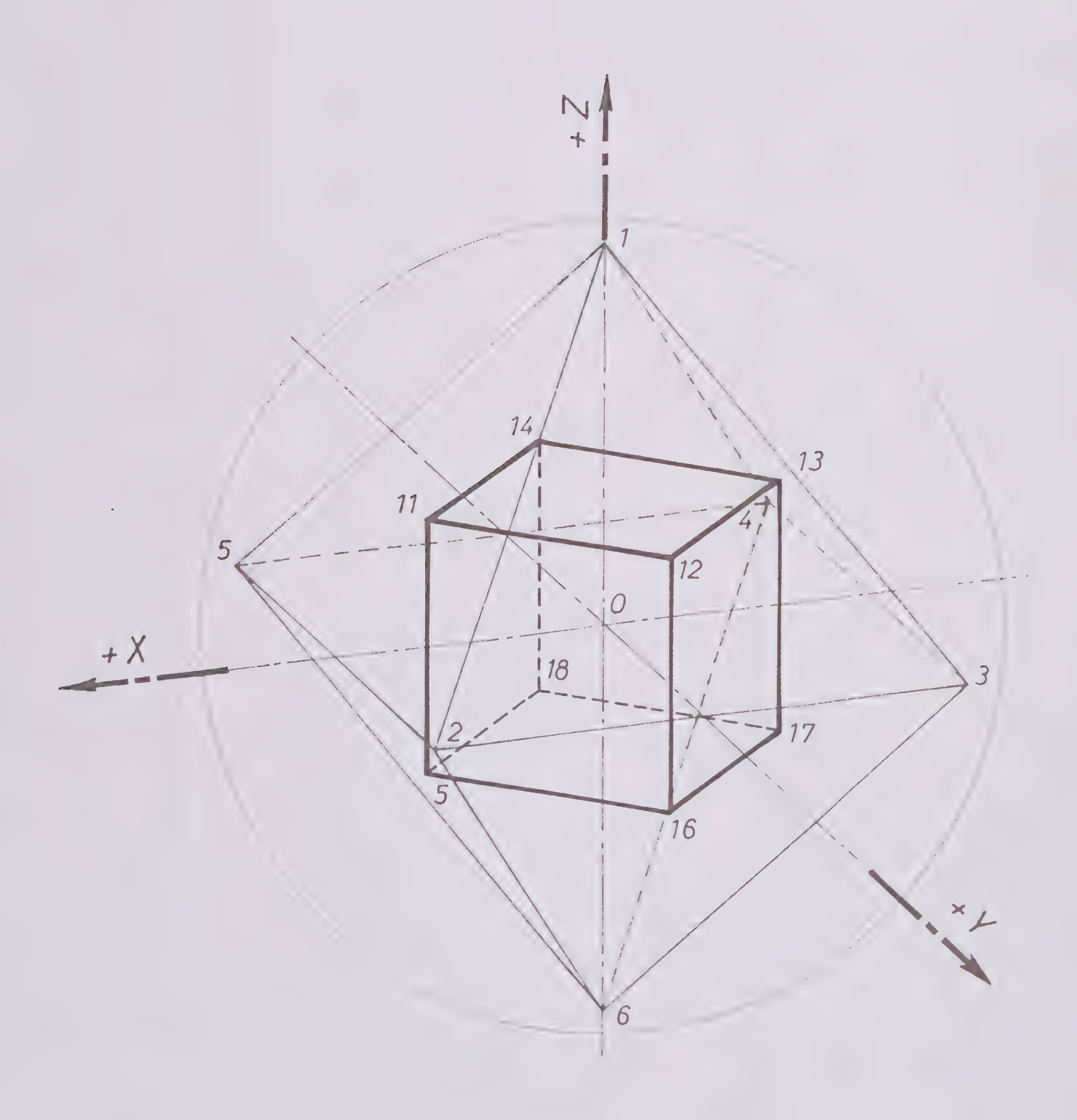
El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		Lámina
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	8
		Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 9ª

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el icosaedro conjugado de un dodecaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al dodecaedro dado, es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_{12} = 55 mm



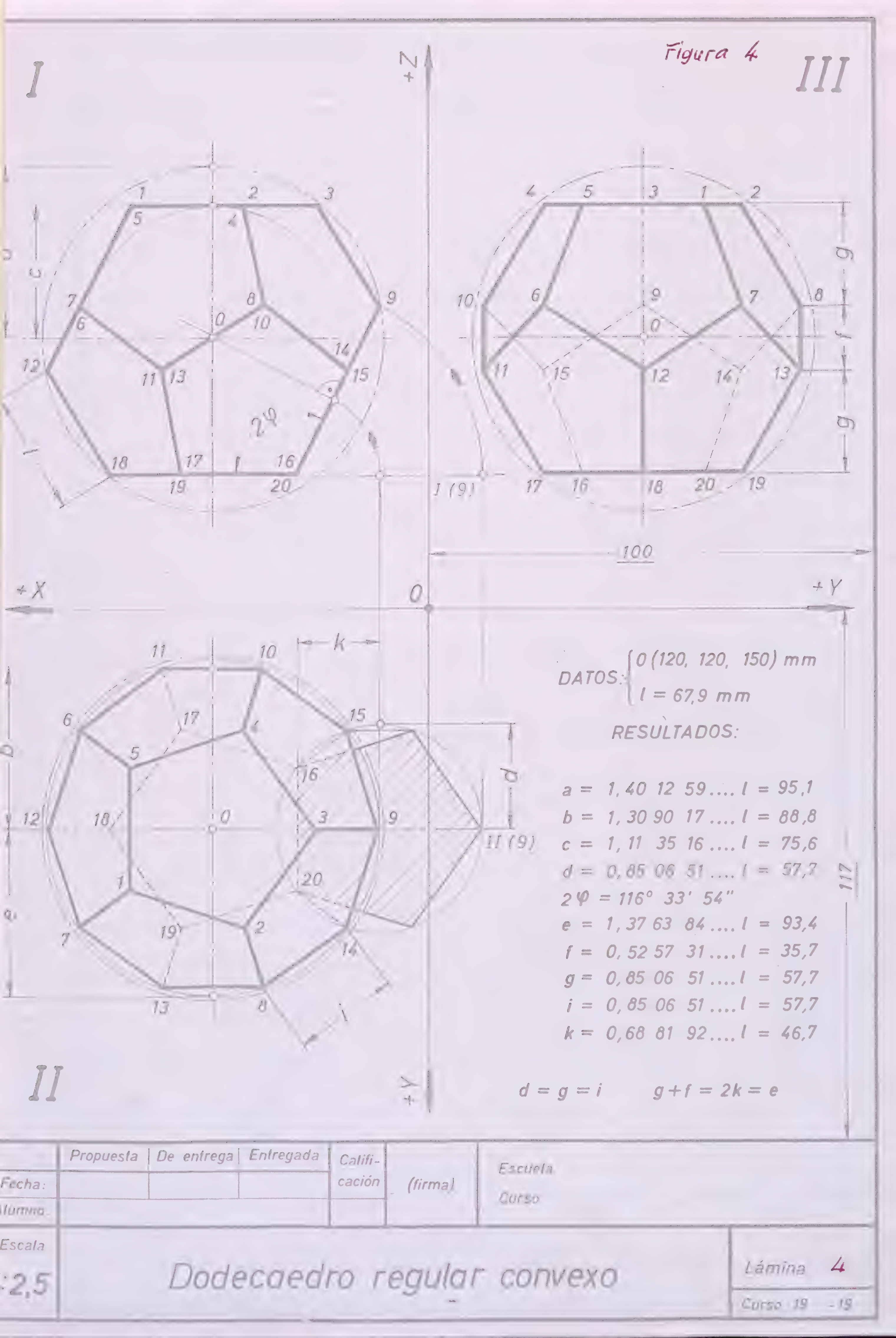


Figura 4
I
II
III
+Z
+X
+Y
0
100
117
DATOS: 0 (120, 120, 150) mm
l = 67,9 mm
RESULTADOS:
a = 1, 40 12 59 .... l = 95,1
b = 1, 30 90 17 .... l = 88,8
c = 1, 11 35 16 .... l = 75,6
d = 0, 85 06 51 .... l = 57,7
2φ = 116° 33' 54"
e = 1, 37 63 84 .... l = 93,4
f = 0, 52 57 31 .... l = 35,7
g = 0, 85 06 51 .... l = 57,7
i = 0, 85 06 51 .... l = 57,7
k = 0, 68 81 92 .... l = 46,7
d = g = i   g + f = 2k = e
I (9)
II (9)
Propuesta
De entrega
Entregada
Calificación
(firma)
Fecha:
Alumno:
Escuela
Curso
Escala
:2,5
Dodecaedro regular convexo
Lámina 4
Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Determínese previamente el lado del dodecaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de lám. 4); el lado será:

$$l_{12} = \frac{55}{1,40\,12\,59} = 39,25\,04\,17 \cong 39,3$$

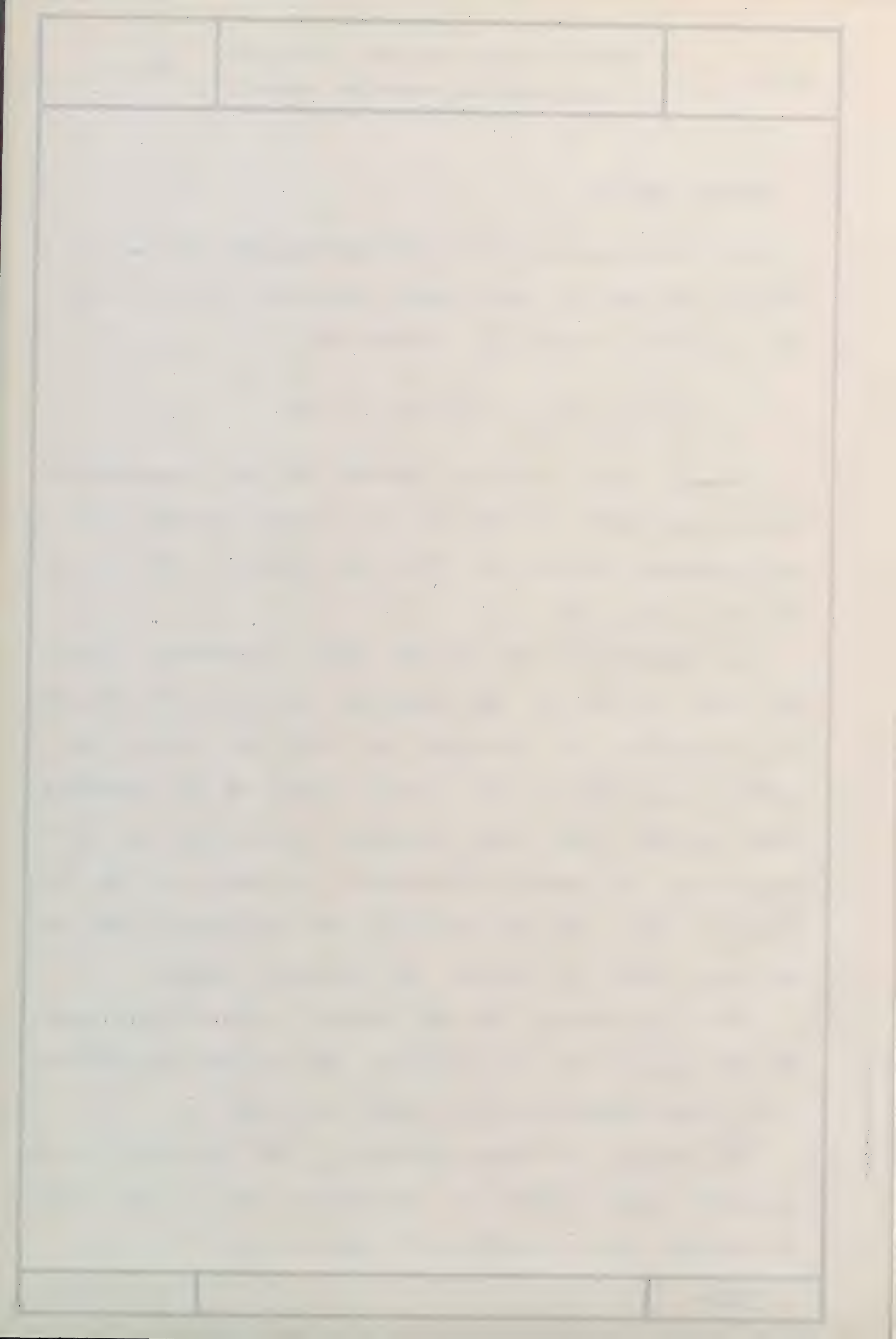
Tomando como punto de partida este lado, representar el dodecaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 4. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del icosaedro pedido se efectuará uniendo los centros de las caras del dodecaedro, los cuales están situados en el espacio en la intersección de rectas que unan dos vértices consecutivos con los puntos medios de los respectivos lados opuestos. Como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III, las proyecciones de los centros de las caras, que serán los vértices del icosaedro pedido.

Una comprobación de este trazado es la correspondencia de las proyecciones de los vértices del icosaedro al obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

Este trazado, de laboriosa ejecución y falto de precisión por los inevitables errores gráficos, se simplifica con el proceso gráfico-analítico que a continuación exponemos.

UNE A4 210 X 297



PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente de la forma siguiente.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el dodecaedro dado, es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente, calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al dodecaedro dado, que será la circunscrita del icosaedro conjugado.

Así pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 4ª, se verificará:

$$c_{12} = a'_{20} = 1.11\ 35\ 16 \times 39,\ 25\ 04\ 17 = 43,\ 70\ 59\ 53 \cong 43,7 \text{ mm}$$

y por consiguiente, el lado del icosaedro conjugado (fig. 5), valdrá

$$l'_{20} = \frac{43.\ 70\ 59\ 53}{0,95\ 10\ 57} = 45,\ 95\ 51\ 36 \cong 46,0 \text{ mm}$$

con cuyo valor podemos calcular las restantes del icosaedro conjugado que se expresan a continuación:

$a'_{20} = 0,95\ 10\ 57 \times 45,95\ 51\ 36 = 43,7$ mm

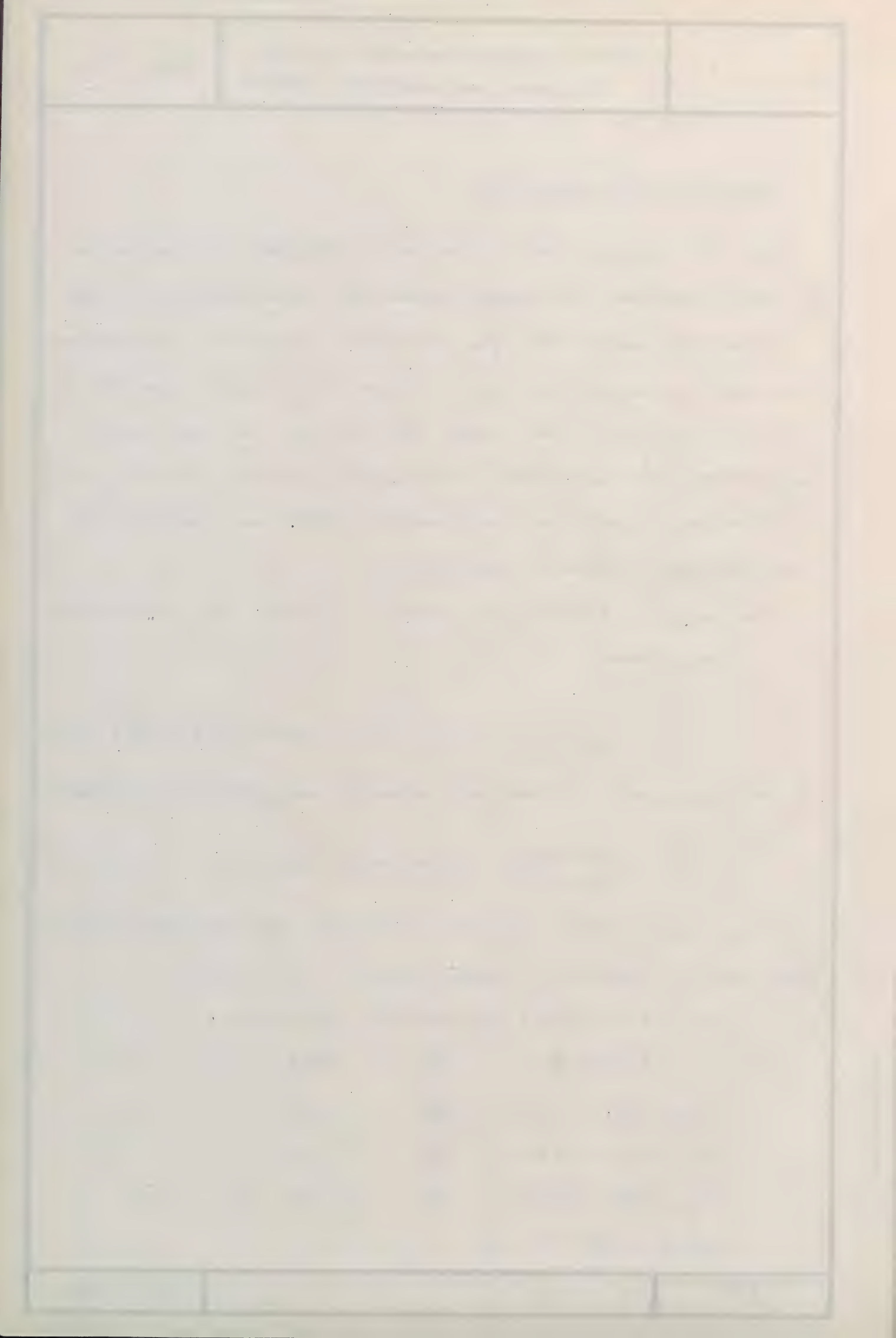
$b'_{20} = 0,80\ 90\ 17 \times$ id $= 37,2$ "

$c'_{20} = 0,75\ 57\ 61 \times$ id $= 34,7$ "

$d'_{20} = 0,57\ 73\ 50 \times$ id $= 26,5$ "

$e'_{20} = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 39,1$ "

$2\varphi_{20} = 138°\ 11'\ 23''$



$$f'_{20} = 0{,}85\ 06\ 51 \times 45{,}95\ 51\ 36 = 39{,}1 \text{ mm}$$

$$g'_{20} = 0{,}52\ 57\ 31 \times \quad id \quad = 24{,}2 \text{ ''}$$

$$h'_{20} = 0{,}68\ 81\ 91 \times \quad id \quad = 31{,}6 \text{ ''}$$

$$i'_{20} = 0{,}52\ 57\ 31 \times \quad id \quad = 24{,}2 \text{ ''}$$

$$k'_{20} = 0{,}28\ 86\ 75 \times \quad id \quad = 13{,}3 \text{ ''}$$

con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$g'_{20} = i'_{20} = 24{,}2$ mm $\qquad 2k'_{20} = d'_{20} = 2 \times 13{,}3 = 26{,}5 \qquad e'_{20} = f'_{20} = 39{,}1$ mm

$$g'_{20} + f'_{20} = 2h'_{20} = 24{,}2 + 39{,}1 = 2 \times 31{,}6 = 63{,}2 \text{ mm.}$$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al dodecaedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita al dodecaedro dado, cuyos valores son:

$$a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} \qquad c_{12} = a'_{20} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}$$

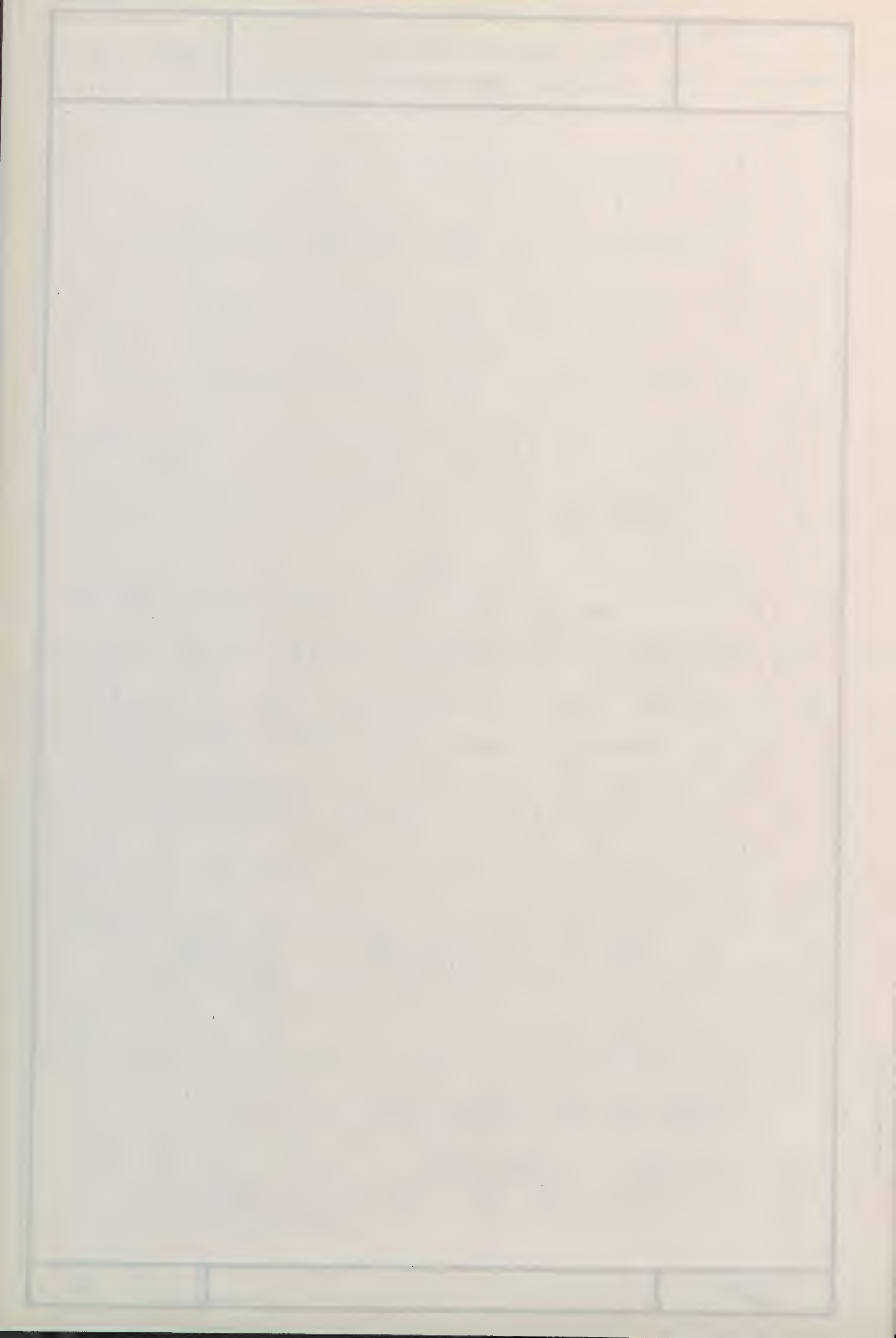
y por consiguiente:

$$\frac{a_{12}}{c_{12}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} : \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} =$$

$$= 1{,}25\ 84\ 09 \ldots \qquad [1]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{a_{12}}{c_{12}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} : \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}} =$$



$$= \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}} = \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{2 \times \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \frac{5(\sqrt{15} + \sqrt{3})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{25 + 11\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5(\sqrt{15} + \sqrt{3})(25 - 11\sqrt{5})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{25^2 - 11^2 \times 5} = \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})(25 - 11\sqrt{5})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{4} =$$

$$= \frac{(25\sqrt{15} + 25\sqrt{3} - 55\sqrt{3} - 11\sqrt{15})\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}}{4} = \frac{14\sqrt{15} - 30\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{15} - 15\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{(7\sqrt{15} - 15\sqrt{3})^2 \times (25 + 11\sqrt{5})}{40}} =$$

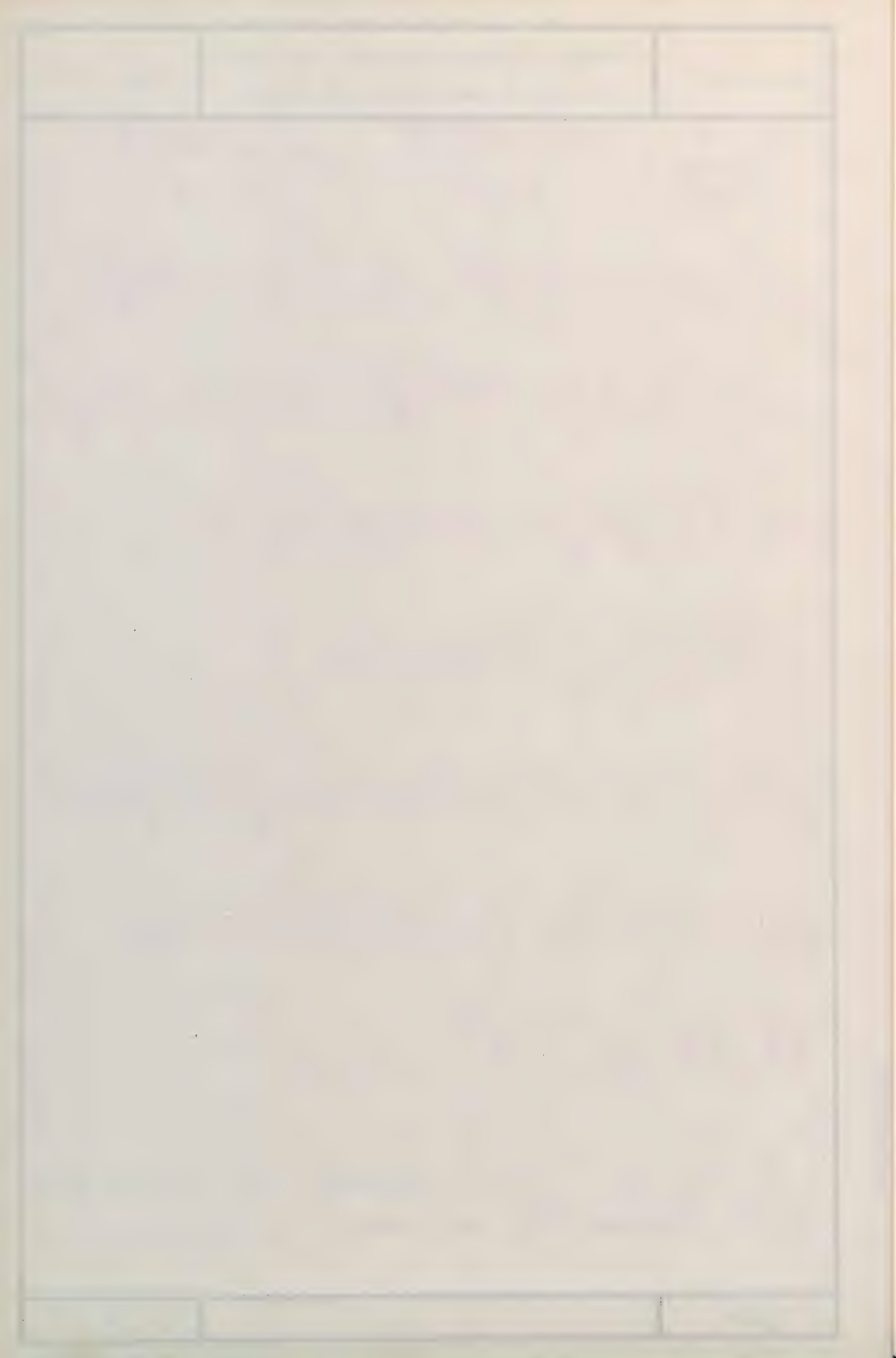
$$= \sqrt{\frac{(7^2 \times 15 + 15^2 \times 3 - 2 \times 7 \times 15 \times 3\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(7^2 \times 3 + 15 \times 3 \times 3 - 2 \times 7 \times 3 \times 3\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{8}} = \sqrt{\frac{(282 - 126\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(141 - 63\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{4}} = \sqrt{\frac{3525 - 1575\sqrt{5} + 1551\sqrt{5} - 3465}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{60 - 24\sqrt{5}}{4}} = \boxed{\sqrt{15 - 6\sqrt{5}}} \cong 1,25\,84\,09\ldots.$$

El lado l'_{20} del icosaedro conjugado, en función del lado l_{12} del dodecaedro dado, será pues:



$$a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l_{12} \qquad c_{12} = a'_{20} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}$$

de donde

$$l'_{20} = a'_{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} \cong$$

$$\cong 1,17\,08\,20\ldots\, l_{12} \qquad [2]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$l'_{20} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\, l_{12} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40} : (10+2\sqrt{5})}\; l_{12} = 2\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10(10+2\sqrt{5})}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{10} \times \frac{25+11\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{(25+11\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{100-20}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{250+110\sqrt{5}-50\sqrt{5}-110}{40}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{140+60\sqrt{5}}{40}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}\, l_{12} = \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}\, l_{12} = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{10}}\, l_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{9}{2}\times 10}+\sqrt{\frac{5}{2}\times 10}}{10}\, l_{12} = \frac{\sqrt{45}+\sqrt{25}}{10}\, l_{12} = \boxed{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}}$$

UNE A4 210 X 297

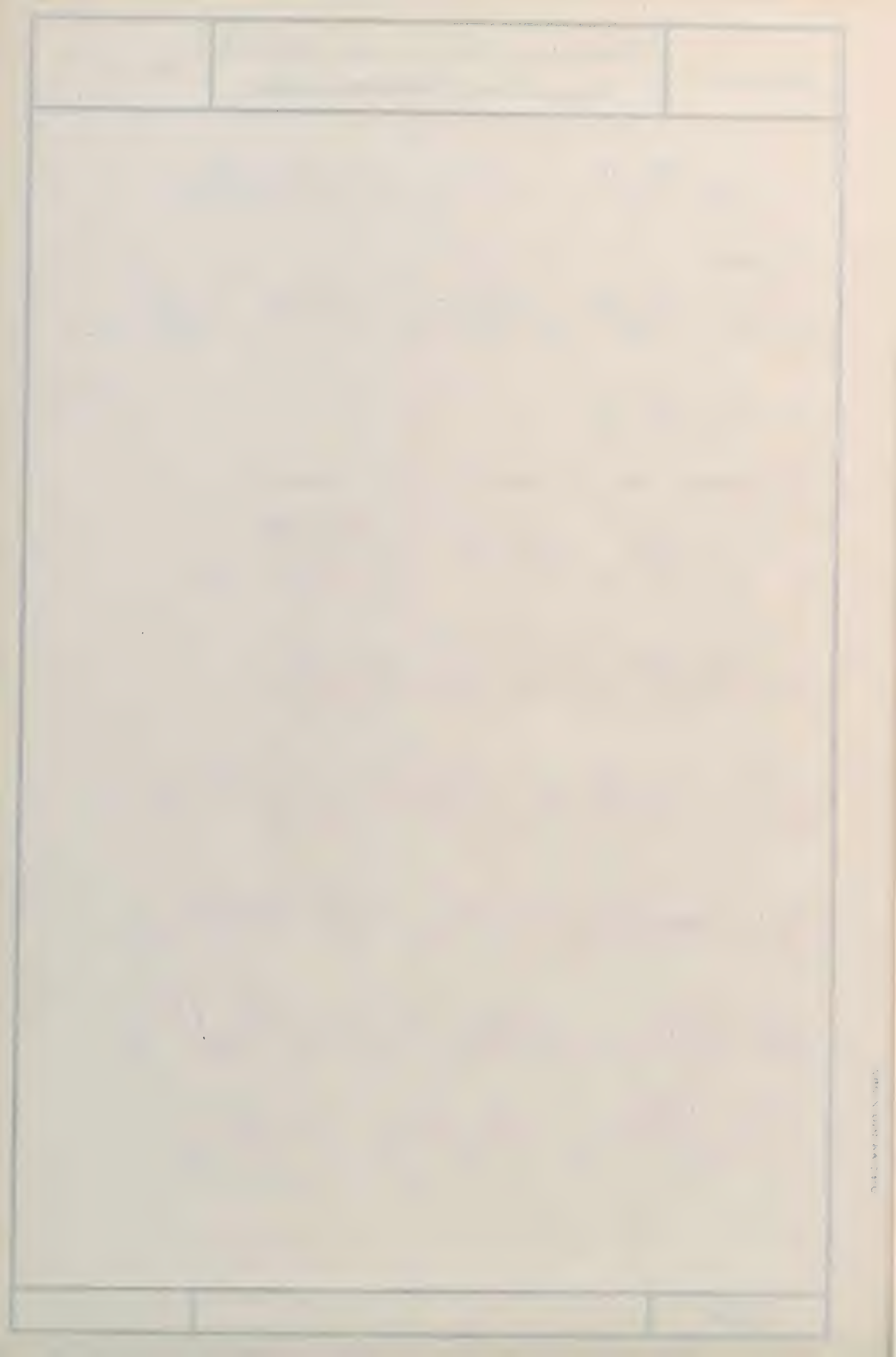


FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el icosaedro conjugado por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros de 26,0 mm de lado, situado interiormente en un dodecaedro regular formado por 12 caras pentagonales (transparentes) de 39,3 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_{20} = Lado del icosaedro conjugado

a'_{20} = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_{20} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_{20} = Radio de la esfera inscrita.

d'_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_{20}$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e'_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado l'_{20}, y también al decágono regular de lado i'_{20}, contorno de la vista II.

f'_{20} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g'_{20} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

h'_{20} = Apotema de un pentágono regular de lado l'_{20}.



l'_{20} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k'_{20} = Apotema del polígono de una cara.

S'_{20} = Superficie.

V'_{20} = Volumen.

Los valores anteriores del icosaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_{12} del dodecaedro dado, ya que el valor conocido de l'_{20} en función de l_{12} (ver fórm. [2]), es

$$l'_{20} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 43 a 55 de la lámina 5, tendremos:

$$a'_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\right) l_{12} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; l_{12}$$

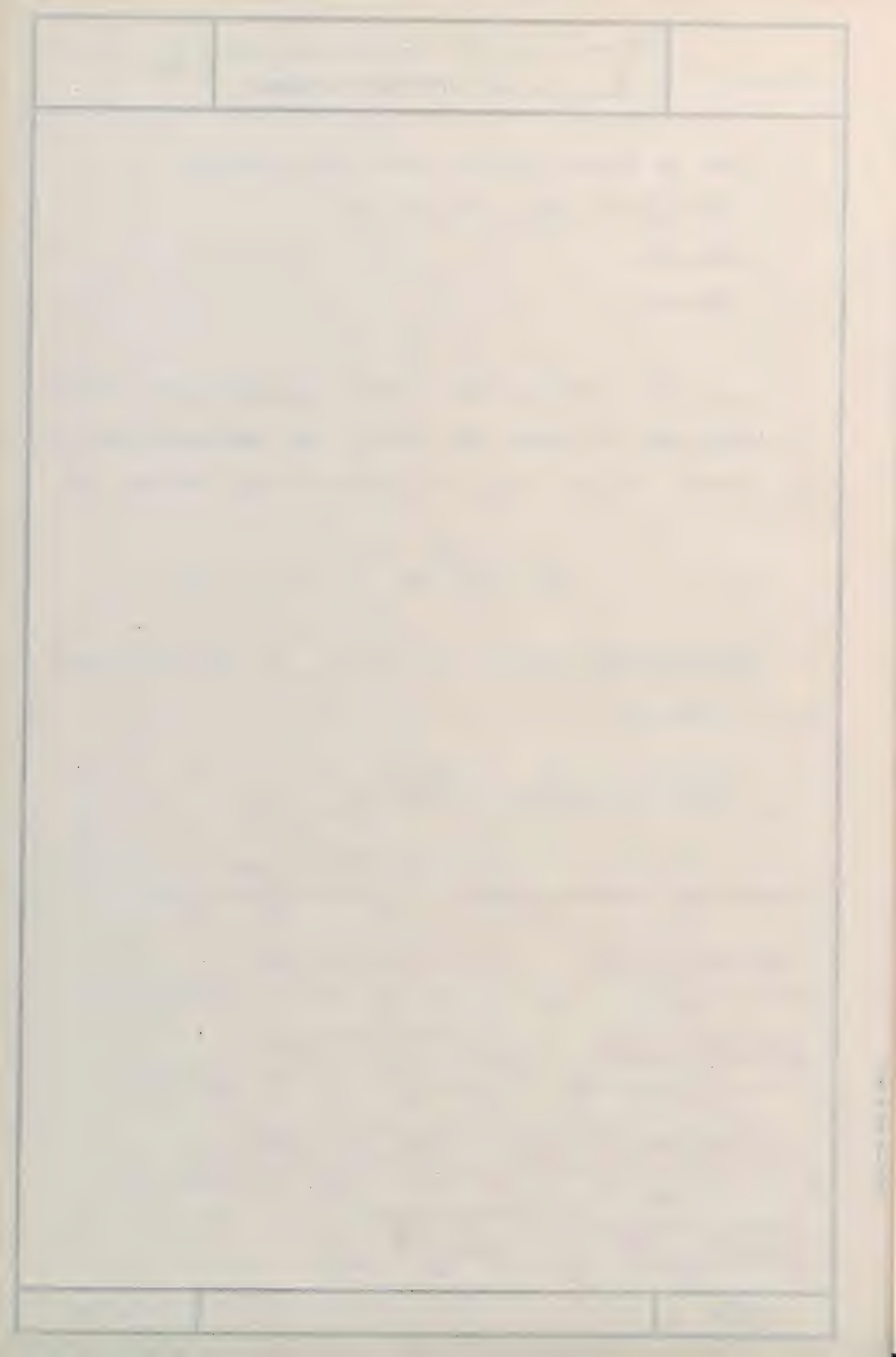
Desarrollo del cálculo anterior: $\dfrac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \times \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(5 + 3\sqrt{5})^2}}{40}\, l_{12} = \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})(25 + 45 + 30\sqrt{5})}}{40}\, l_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})(70 + 30\sqrt{5})}}{40}\, l_{12} = \frac{\sqrt{2 \times 10 \times (5 + \sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})}}{40}\, l_{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5 \times (35 + 7\sqrt{5} + 15\sqrt{5} + 15)}}{40}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5 \times (50 + 22\sqrt{5})}}{20}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{10 \times (25 + 11\sqrt{5})}{400}}\; l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\; l_{12}}$$



$$b'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \frac{5+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+15}{40}\, l_{12} = \frac{20+8\sqrt{5}}{40}\, l_{12} = \boxed{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\, l_{12}}$$

$$c'_{20} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{7\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{60}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}+9\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{120}\, l_{12} = \frac{30\sqrt{3}+14\sqrt{15}}{120}\, l_{12} = \boxed{\frac{7\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{60}\, l_{12}}$$

$$d'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{30}\, l_{12}$$

$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

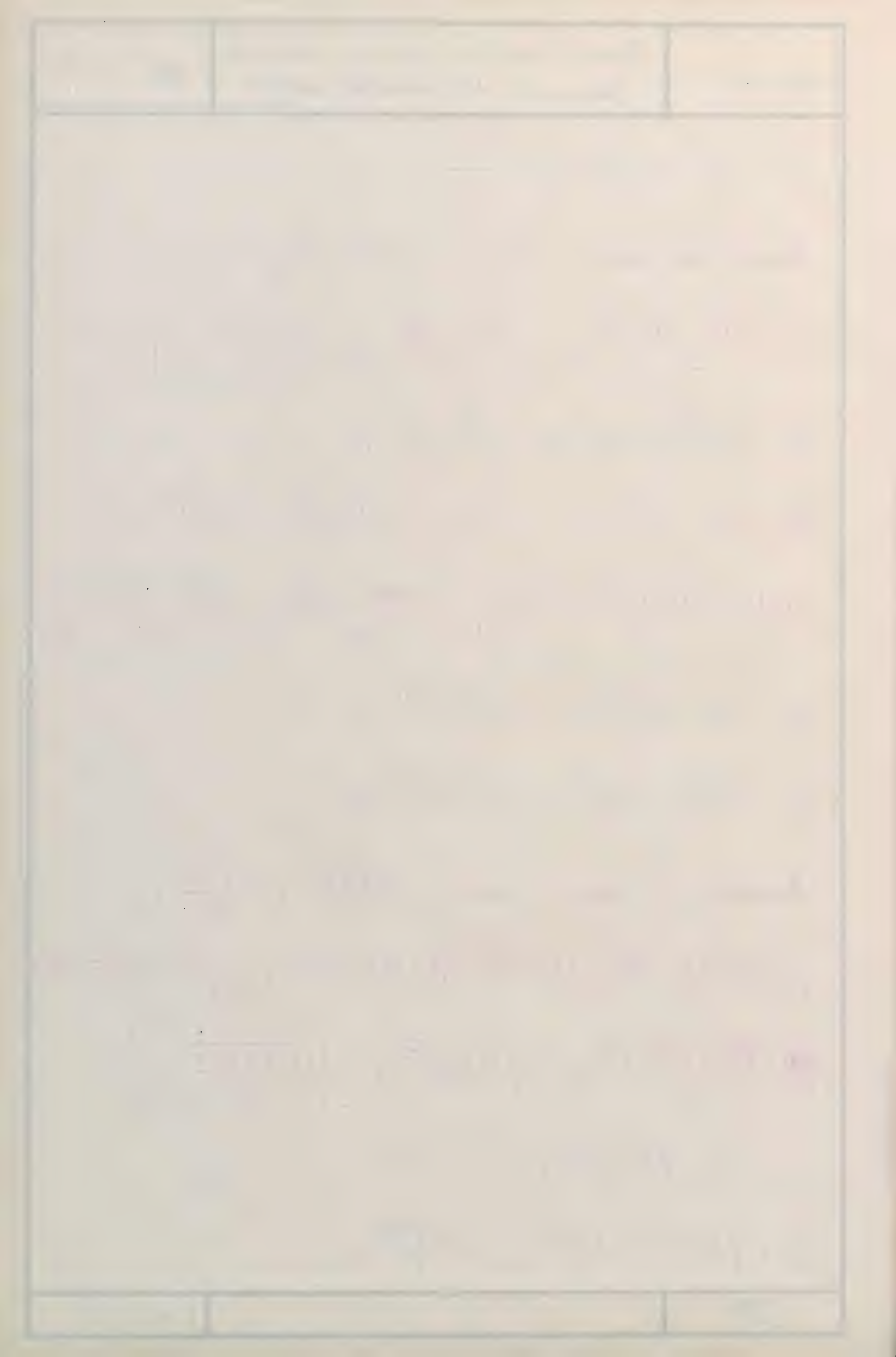
$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{1000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{1000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{10\times(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{1000}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15}{100}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{100}}\, l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\, l_{12}}$$

$$f'_{20} = e'_{20} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\, l_{12}$$

$$g'_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, l_{12}$$

UNE A4 210 X 297



Desarrollo del cálculo anterior: $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\; l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{1000}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{1000}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{1000}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{100}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{35-7\sqrt{5}+15\sqrt{5}-15}{100}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{100}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{4\times(5+2\sqrt{5})}{100}}\; l_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\; l_{12}}$$

$$h'_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\; l_{12} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}\; l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\; l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{2000}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{2000}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{2000}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{200}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{35+14\sqrt{5}+15\sqrt{5}+30}{200}}\; l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{200}}\; l_{12} = \boxed{\frac{1}{10}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}\; l_{12}}$$

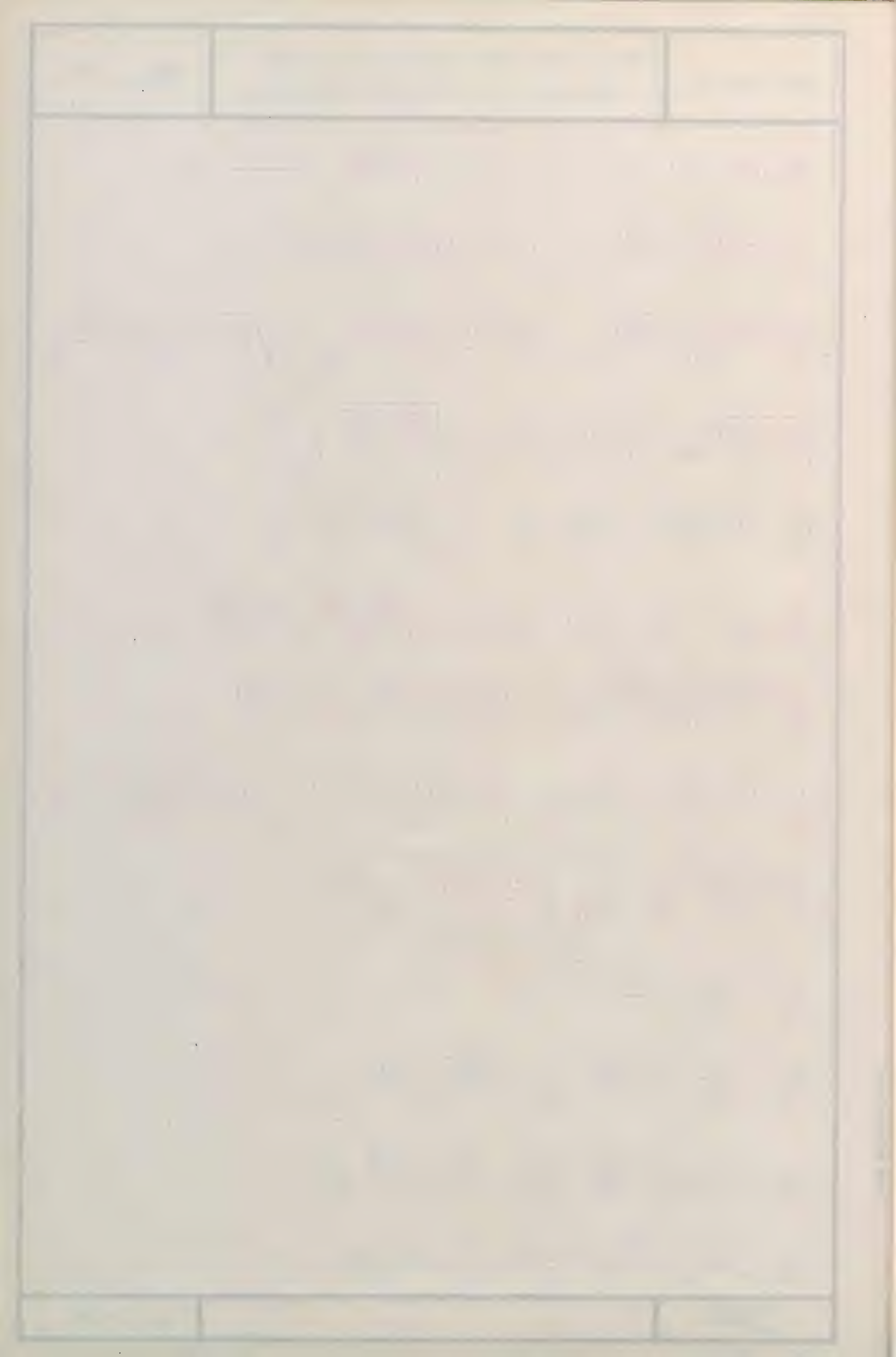
$$i'_{20} = g'_{20} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\; l_{12}$$

$$k'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\; l_{12} = \frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{60}\; l_{12}$$

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\; l_{12}\right)^2 = \frac{3\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{2}\; l_{12}^2$$

$$V'_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\; l_{12}\right)^3 = \frac{105+47\sqrt{5}}{60}\; l_{12}^3$$

UNE A4 210 X 297



Desarrollo de los dos últimos cálculos:

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \, l_{12} \right)^2 = \frac{5\sqrt{3} \times \left(5 + 3\sqrt{5}\right)^2}{100} \, l_{12}^2 = \frac{5\sqrt{3} \times (25 + 45 + 30\sqrt{5})}{100} \, l_{12}^2$$

$$= \frac{5\sqrt{3} \times (70 + 30\sqrt{5})}{100} \, l_{12}^2 = \frac{5\sqrt{3} \times (7 + 3\sqrt{5})}{10} \, l_{12}^2 = \frac{\sqrt{3} \times (7 + 3\sqrt{5})}{2} \, l_{12}^2 =$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{15} + 7\sqrt{3}}{2} \, l_{12}^2}$$

$$V'_{20} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \, l_{12} \right)^3 = \frac{(15 + 5\sqrt{5})(5 + 3\sqrt{5})\,(5 + 3\sqrt{5})^2}{12 \times 10^3} \, l_{12}^3 =$$

$$= \frac{(75 + 22\sqrt{5} + 45\sqrt{5} + 75)(25 + 45 + 30\sqrt{5})}{12\,000} \, l_{12}^3 = \frac{(150 + 70\sqrt{5})(70 + 30\sqrt{5})}{12\,000} \, l_{12}^3 =$$

$$= \frac{(15 + 7\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})}{120} \, l_{12}^3 = \frac{105 + 49\sqrt{5} + 45\sqrt{5} + 105}{120} \, l_{72}^3 = \frac{210 + 94\sqrt{5}}{120} \, l_{12}^3 =$$

$$= \boxed{\frac{105 + 47\sqrt{5}}{60} \, l_{12}^3}$$

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\dfrac{l_{12}}{l'_{20}} = \dfrac{1}{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}} = \dfrac{3\sqrt{5} - 5}{2}$ (ver fórmula [2]

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{l_{12}}{l'_{20}} = \frac{1}{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}} = \frac{10}{3\sqrt{5} + 5} = \frac{10\,(3\sqrt{5} - 5)}{45 - 25} = \frac{10\,(3\sqrt{5} - 5)}{20} = \boxed{\frac{3\sqrt{5} - 5}{2}}$$



b) $$\frac{S_{12}}{S'_{20}} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\; l_{12}^2}{\frac{7\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{2}\; l_{12}^2} = \sqrt{\frac{15\times(25-11\sqrt{5})}{2}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $$\frac{S_{12}}{S'_{20}} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\; l_{12}^2}{\frac{7\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}\; l_{12}^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{7\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})^2}}{147-135} =$$

$$= \frac{6\sqrt{(25+10\sqrt{5})(147+135-42\sqrt{45})}}{12} = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(282-42\times3\sqrt{5})}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6(25+10\sqrt{5})(47-21\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{6\times(1175+470\sqrt{5}-525\sqrt{5}-1050}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6\times(125-55\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{30\times(25-11\sqrt{5})}}{2} = \sqrt{\frac{30}{4}\times(25-11\sqrt{5})} = \boxed{\sqrt{\frac{15\times(25-11\sqrt{5})}{2}}}$$

c) $$\frac{V_{12}}{V'_{20}} = \frac{\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\; l_{12}^3}{\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\; l_{12}^3} = \frac{15\times(7-3\sqrt{5})}{2}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{V_{12}}{V'_{20}} = \frac{\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\; l_{12}^3}{\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\; l_{12}^3} = \frac{60\times(7\sqrt{5}+15)}{4\times(105+47\sqrt{5})} = \frac{15\times(7\sqrt{5}+15)(105-47\sqrt{5})}{105^2-(47\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{15\times(7\sqrt{5}+15)(105-47\sqrt{5})}{11025-11045} = \frac{15\times(7\sqrt{5}+15)(47\sqrt{5}-105)}{20} =$$

$$= \frac{15\times(1645+705\sqrt{5}-735\sqrt{5}-1575)}{20} = \frac{15\times(70-30\sqrt{5})}{20} = \boxed{\frac{15\times(7-3\sqrt{5})}{2}}$$

UNE A4 210 X 297



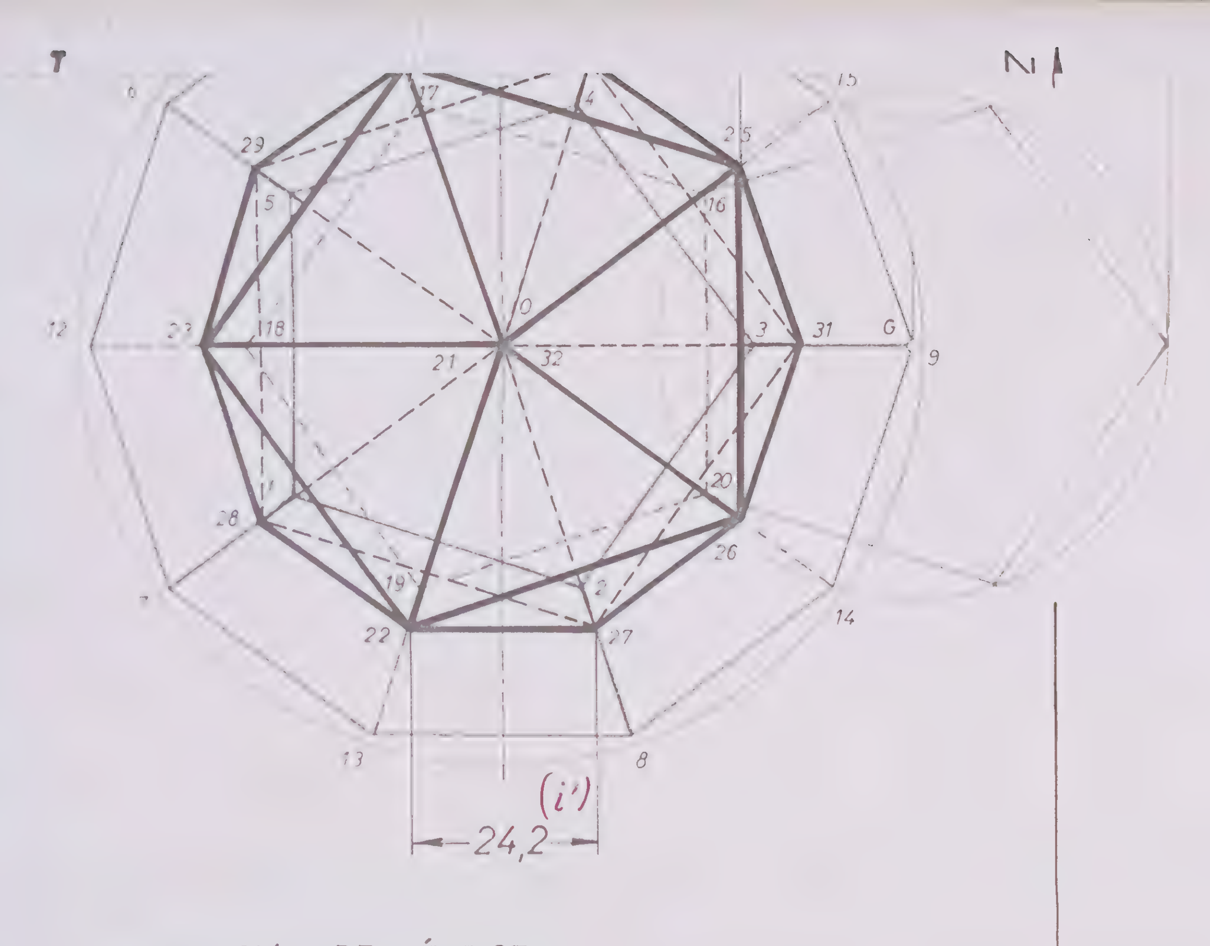
En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(92) l'_{20}	$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\ l_{12}$	$1.17\ 08\ 20 \ldots\ l_{12}$
(93) a'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\ l_{12}$	$1.11\ 35\ 16 \ldots\ l_{12}$
(94) b'_{20}	$\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\ l_{12}$	$0.94\ 72\ 14 \ldots\ l_{12}$
(95) c'_{20}	$\frac{7\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{60}\ l_{12}$	$0.88\ 48\ 61 \ldots\ l_{12}$
(96) d'_{20}	$\frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{30}\ l_{12}$	$0.67\ 59\ 73 \ldots\ l_{12}$
(97) e'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\ l_{12}$	$0.99\ 59\ 59 \ldots\ l_{12}$
(98) f'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\ l_{12}$	$0.99\ 59\ 59 \ldots\ l_{12}$
(99) g'_{20}	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\ l_{12}$	$0.61\ 55\ 37 \ldots\ l_{12}$
(100) h'_{20}	$\frac{1}{10}\times\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}\ l_{12}$	$0.80\ 57\ 48 \ldots\ l_{12}$
(101) i'_{20}	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\ l_{12}$	$0.61\ 55\ 37 \ldots\ l_{12}$
(102) k'_{20}	$\frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{60}\ l_{12}$	$0.33\ 79\ 87 \ldots\ l_{12}$
(103) $2\varphi_{20}$	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	$\operatorname{sen}\varphi_{20} = 0.93\ 41\ 72 \ldots$ $2\varphi_{20} = 138^\circ\ 11'\ 22{,}8''$
(104) S'_{20}	$\frac{3\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{2}\ l_{12}^2$	$11,87\ 16\ 53 \ldots\ l_{12}^2$
(105) V'_{20}	$\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\ l_{12}^3$	$3.50\ 15\ 87 \ldots\ l_{12}^3$
Relaciones entre magnitudes		
$l_{12} : l'_{20}$	$\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$	(106) $0,85\ 41\ 02 \ldots$
$S_{12} : S'_{20}$	$\sqrt{\frac{15\times(25-11\sqrt{5})}{2}}$	(107) $1,73\ 90\ 78 \ldots$
$V_{12} : V'_{20}$	$\frac{15\times(7-3\sqrt{5})}{2}$	(108) $2,18\ 84\ 71 \ldots$

UNE A4 210 X 297





Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el icosaedro regular conjugado de un dodecaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al dodecaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

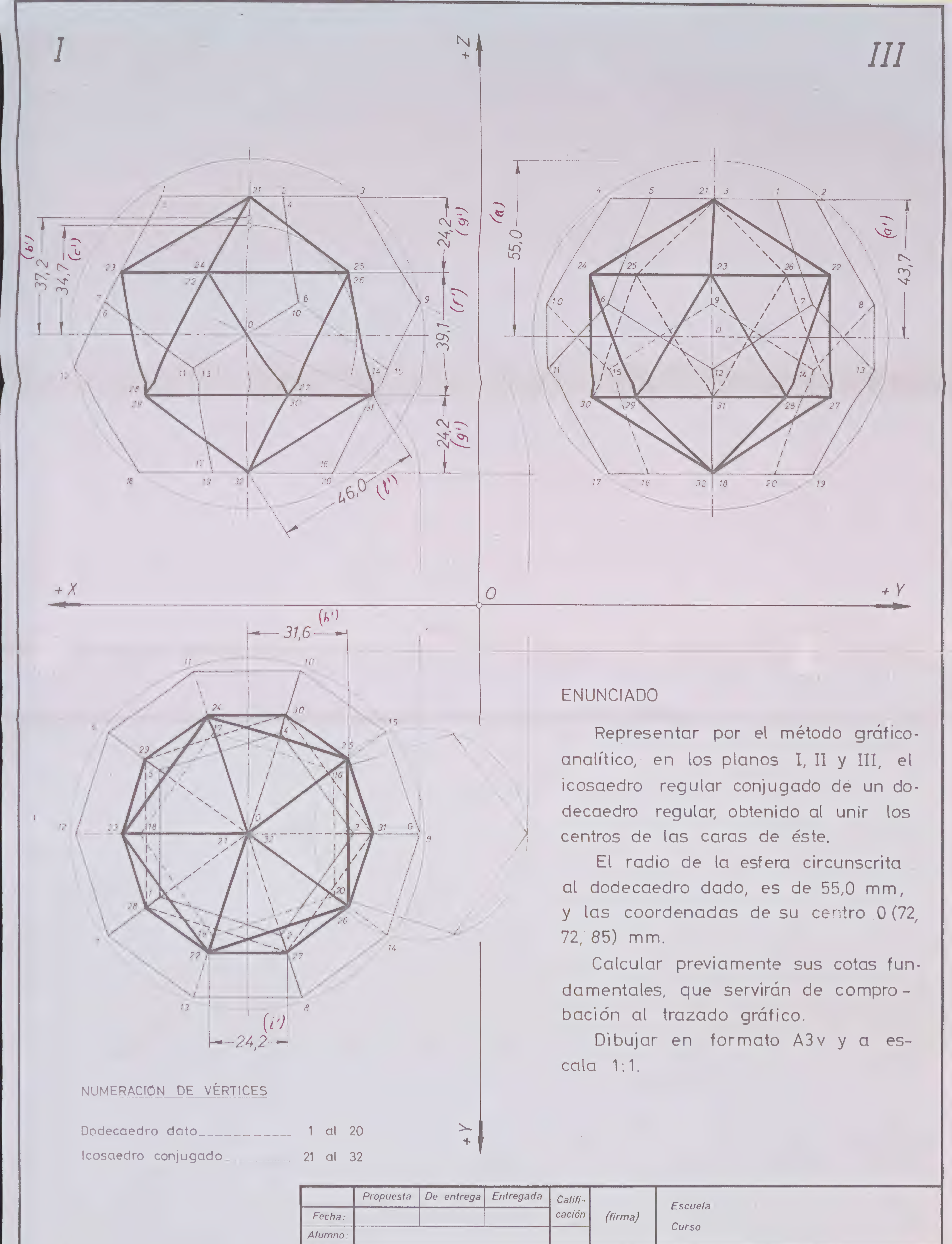
Dodecaedro dato .... 1 al 20

Icosaedro conjugado .... 21 al 32

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 9 Curso 19 -19



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el icosaedro regular conjugado de un dodecaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al dodecaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

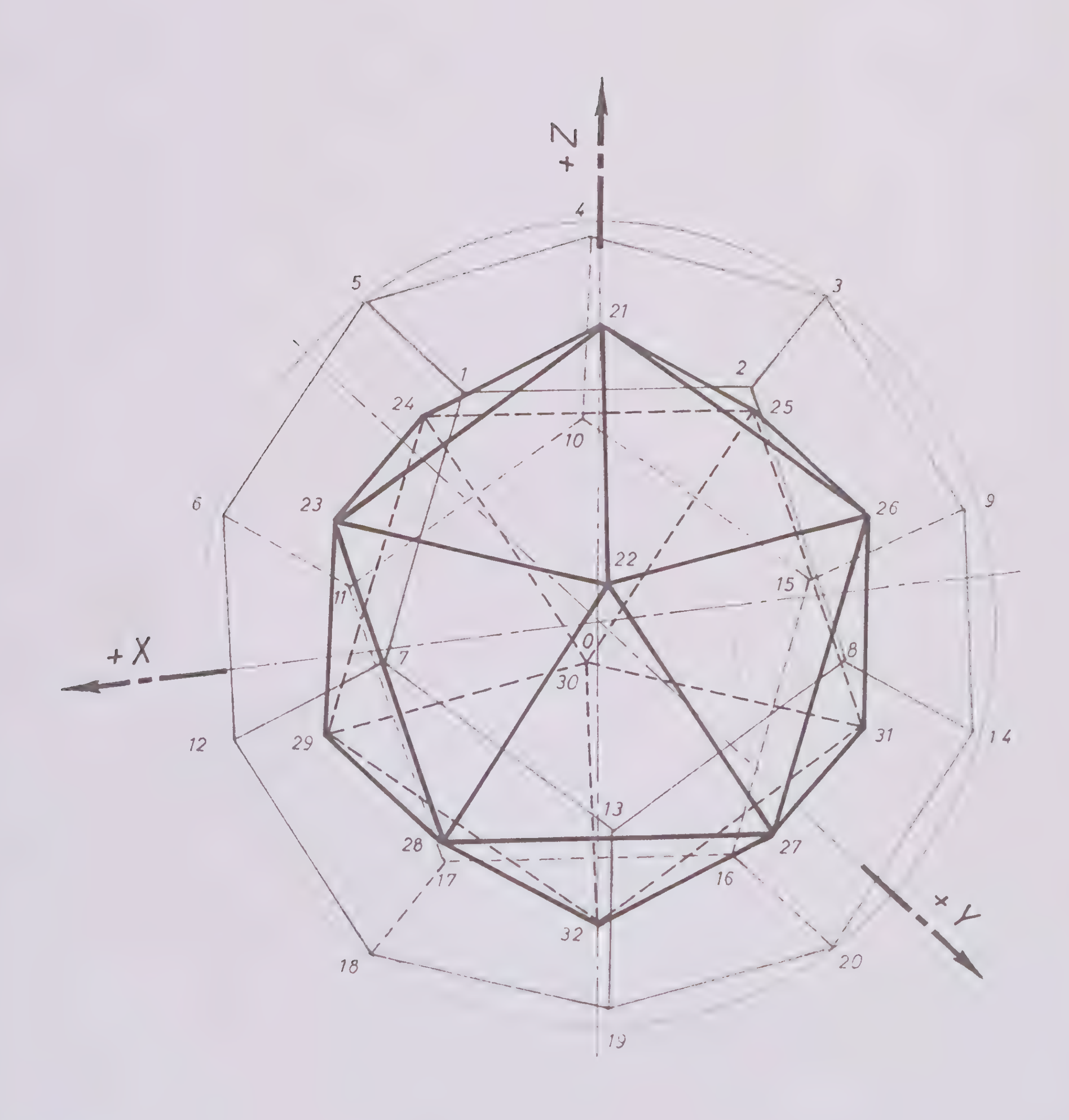
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro dato .... 1 al 20

Icosaedro conjugado .... 21 al 32

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 9
		Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 10

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm.

$a_{20} = 55,0$ mm.



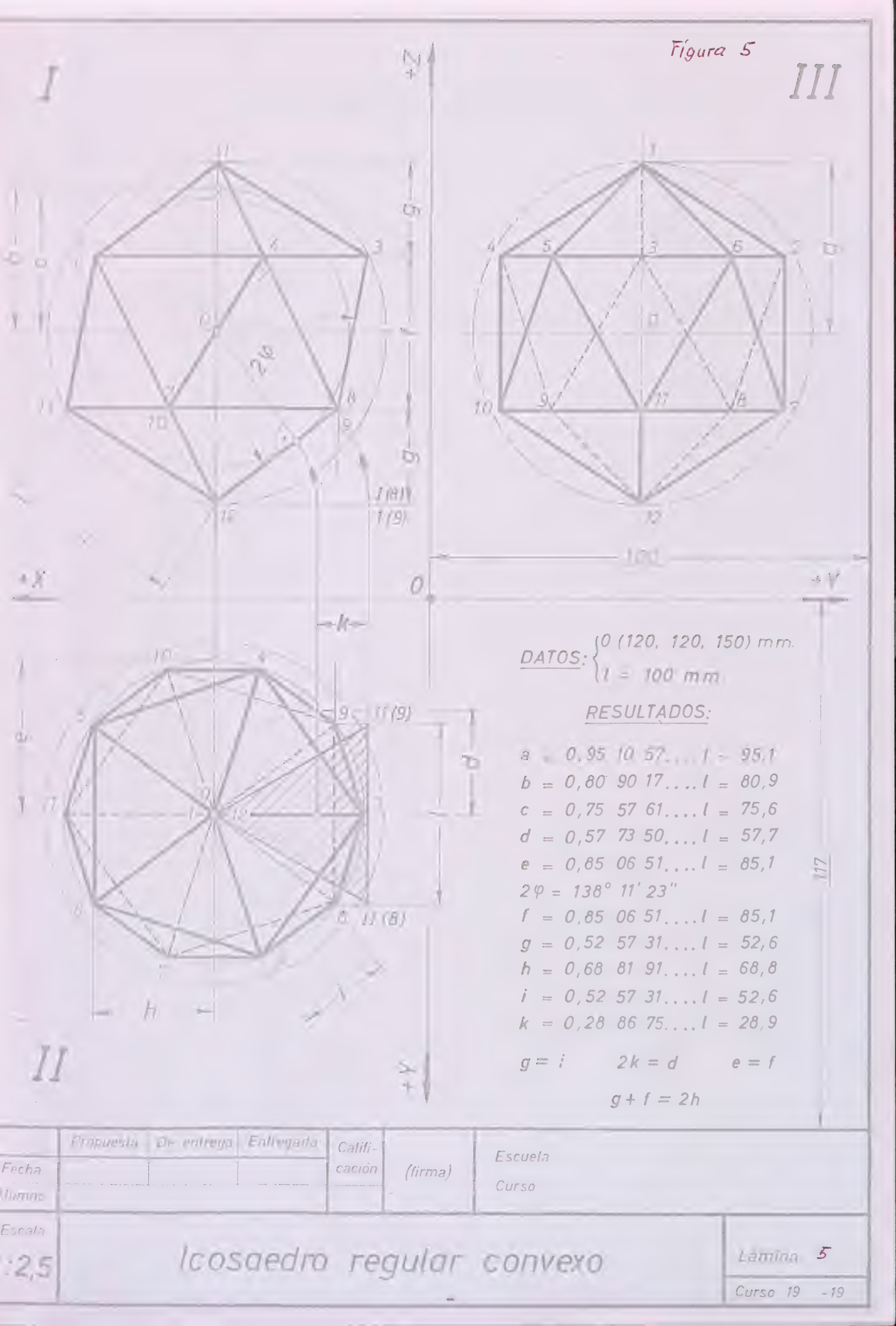


Figura 5
I
III
II
+Z
+X
+Y
O
100
117
DATOS: {O (120, 120, 150) mm. / l = 100 mm
RESULTADOS:
a = 0,95 10 57.... l = 95,1
b = 0,80 90 17.... l = 80,9
c = 0,75 57 61.... l = 75,6
d = 0,57 73 50.... l = 57,7
e = 0,85 06 51.... l = 85,1
2φ = 138° 11' 23"
f = 0,85 06 51.... l = 85,1
g = 0,52 57 31.... l = 52,6
h = 0,68 81 91.... l = 68,8
i = 0,52 57 31.... l = 52,6
k = 0,28 86 75.... l = 28,9
g = i
2k = d
e = f
g + f = 2h
Propuesta
De entrega
Entregada
Fecha
Alumno
Califi-cación
(firma)
Escuela
Curso
Escala
:2,5
Icosaedro regular convexo
Lámina 5
Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del icosaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de lám. 5); el lado será:

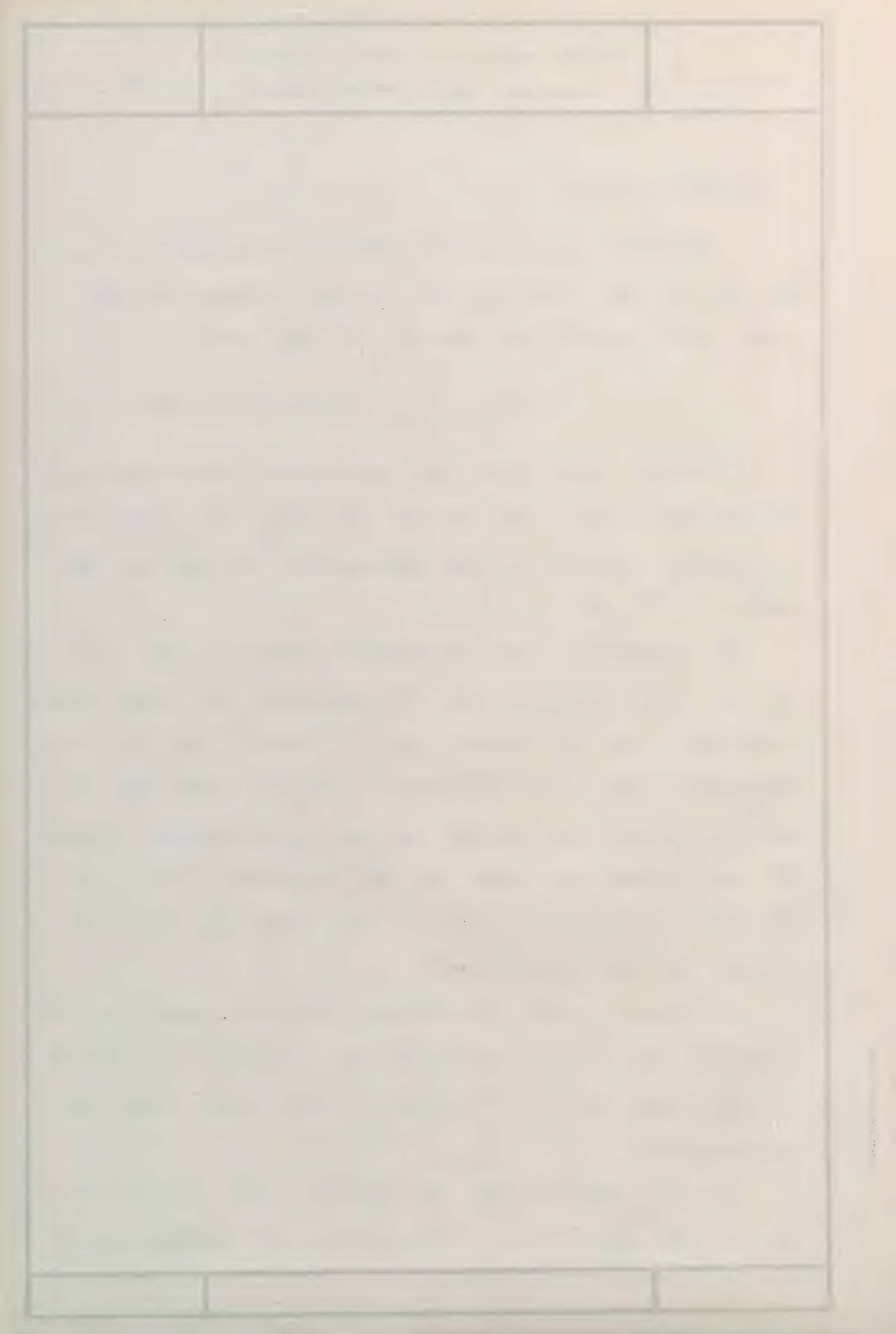
$$l_{20} = \frac{55}{0,95\,10\,57\ldots} = 57,83\,03\,93 \cong 57,8 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el icosaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 5. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del dodecaedro pedido se hará uniendo los centros de las caras del icosaedro, los cuales están situados en el espacio en el baricentro de su cara respectiva (punto de intersección de las medianas); como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III las proyecciones de los centros de las caras, que serán los vértices del dodecaedro pedido.

El trazado puede simplificarse teniendo presente que el baricentro de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de su longitud a partir del vértice correspondiente.

Una comprobación de este trazado es la correspondencia de las proyecciones de los vértices del dodecaedro al



obteniéndose éstos independientemente en cada proyección.

Este trazado puede resultar penoso y falto de precisión por lo que es conveniente simplificarlo con el proceso gráfico-analítico.

PROCESO GRÁFICO- ANALÍTICO

Para la reducción de errores de trazado nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente en la forma que a continuación exponemos.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el icosaedro regular es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al icosaedro dado, que será el de la circunscrita del dodecaedro pedido.

Así pues tendremos que

$$c_{20} = a'_{12}$$

mas teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 5ª, se verificará:

$$c_{20} = 0,75\,57\,61\; l_{20} = 0,75\,57\,61 \times 57,83\,03\,93 =$$

$$= 43,70\,59\,53..\ \text{mm} = a_{12}$$

El lado del dodecaedro conjugado (ver figura 4), será

$$l'_{12} = \frac{43,70\,59\,53}{1,40\,12\,59} = 31,19\,04\,88\ \text{mm}$$

con cuyo valor podemos calcular los restantes del dodecae-



dro que se expresan a continuación:

$a'_{12} = 1{.}40\ 12\ 59 \times 31{,}19\ 66\ 88 = 43{.}7$ mm ✓

$b'_{12} = 1{,}30\ 90\ 17 \times$ id. $= 40{.}8$ " ✓

$c'_{12} = 1{.}11\ 35\ 16 \times$ id $= 34{.}7$ " ✓

$d'_{12} = 0{,}85\ 06\ 51 \times$ id $= 26{.}5$ " ✓

$2\varphi_{12} = 116°\ 33'\ 54''$ ✓

$e'_{12} = 1{.}37\ 63\ 84 \times$ id $= 42{.}9$ "

$f'_{12} = 0{,}52\ 57\ 31 \times$ id $= 16{,}4$ " ✓

$g'_{12} = 0{,}85\ 06\ 51 \times$ id $= 26{,}5$ " ✓

$i'_{12} = 0{,}85\ 06\ 51 \times$ id $= 26{,}5$ " ✓

$k'_{12} = 0{,}68\ 81\ 92 \times$ id $= 21{,}45$ " ✓

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$$d'_{12} = g'_{12} = i'_{12} = 26{,}5 \text{ mm}$$

$$g'_{12} + f'_{12} = 2k \qquad 26{,}5 + 16{,}4 = 2 \times 21{,}45 = 42{,}9 \text{ mm}$$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al icosaedro y dodecaedro conjugados, será:

$$a_{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} \cong 0{,}95\ 10\ 57 \ldots l$$

$$a'_{12} = c_{20} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\, l_{20} \cong 0{,}75\ 57\ 61 \ldots l$$

de donde

$$\frac{a_{20}}{a'_{12}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} : \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12}\, l_{20} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} =$$

$$= 1{,}25\ 84\ 09 \ldots \qquad [1]$$



El desarrollo del cálculo anterior es el siguiente:

$$\frac{a_{20}}{a'_{12}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} : \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} = \frac{12\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3\sqrt{3}+\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)}{27-15} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})\left(27+15-6\sqrt{45}\right)}}{4} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})\left(42-18\sqrt{5}\right)}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{420+84\sqrt{5}-180\sqrt{5}-2\times 18\times 5}}{4} = \frac{\sqrt{240-96\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{240-96\sqrt{5}}{16}} =$$

$$= \boxed{\sqrt{15-6\sqrt{5}}} \cong 1,258409\ldots$$

El lado l'_{12} del dodecaedro conjugado, en función del lado l_{20} del icosaedro dado, será pues:

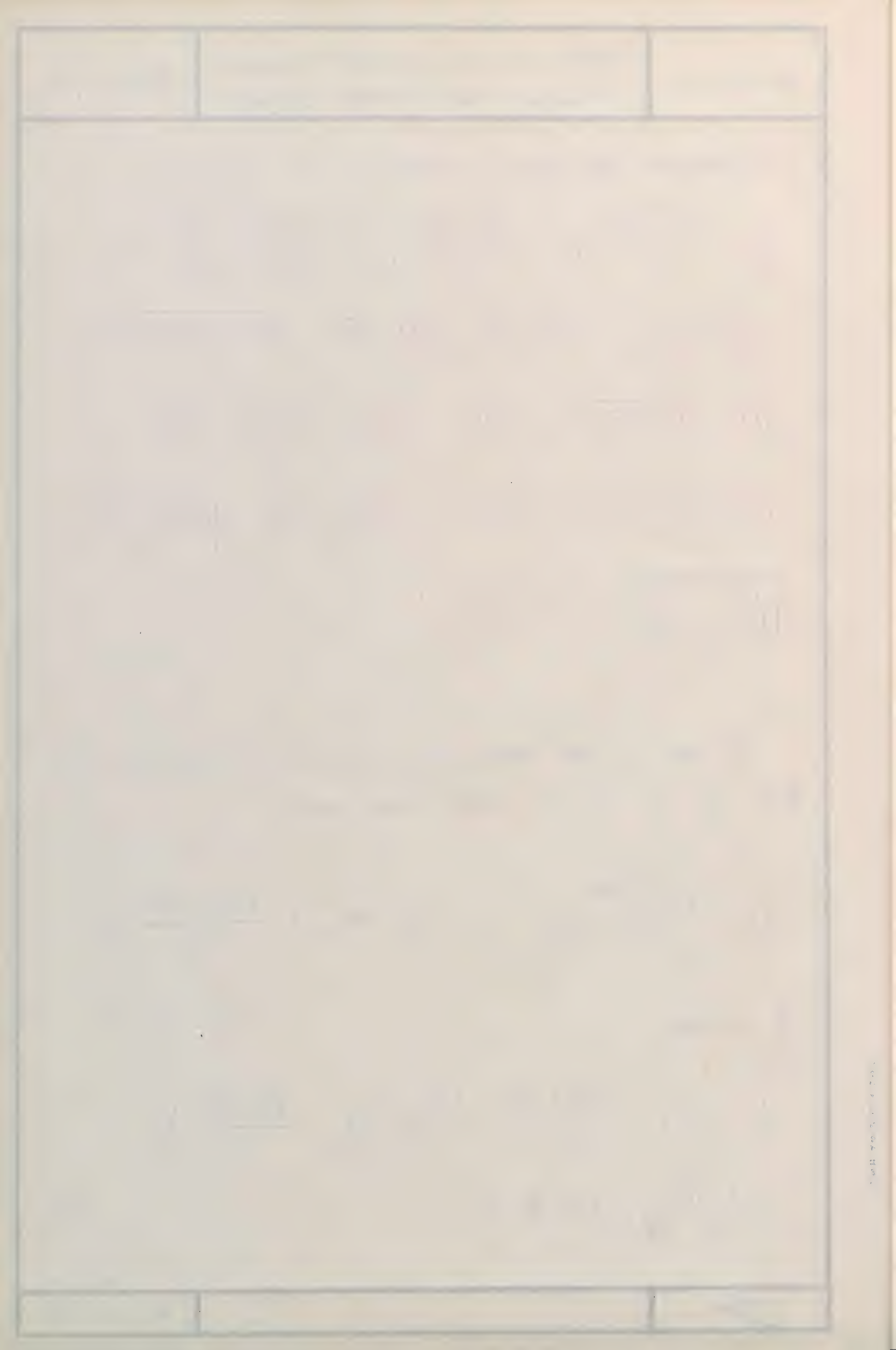
$$a_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} \qquad c_{20} = a'_{12} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20}$$

de donde

$$l'_{12} = a'_{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l_{20} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = 0,539350\ldots \qquad [2]$$

UNE A4 210 X 297



El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$l'_{12} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{4\times\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{12\times\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)}\, l_{20} =$$

$$= \frac{\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{3\times\left(15-3\right)}\, l_{20} = \frac{3\times\sqrt{3\times 3\times 5}+15-3\times 3-\sqrt{3\times 3\times 5}}{36}\, l_{20} =$$

$$= \frac{6+9\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{36}\, l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} \cong 0,53\ 93\ 50\ldots\ l_{20}$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el dodecaedro conjugado por acoplamiento de 12 pentágonos regulares de 31,2 mm de lado, situado interiormente en un icosaedro regular formado por 20 caras triangulares (transparentes) de 57.8 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_{12} = Lado del dodecaedro conjugado

a'_{12} = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_{12} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_{12} = Radio de la esfera inscrita.

d'_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_{12}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

e'_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno de la vista II.

f'_{12} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g'_{12} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

i'_{12} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

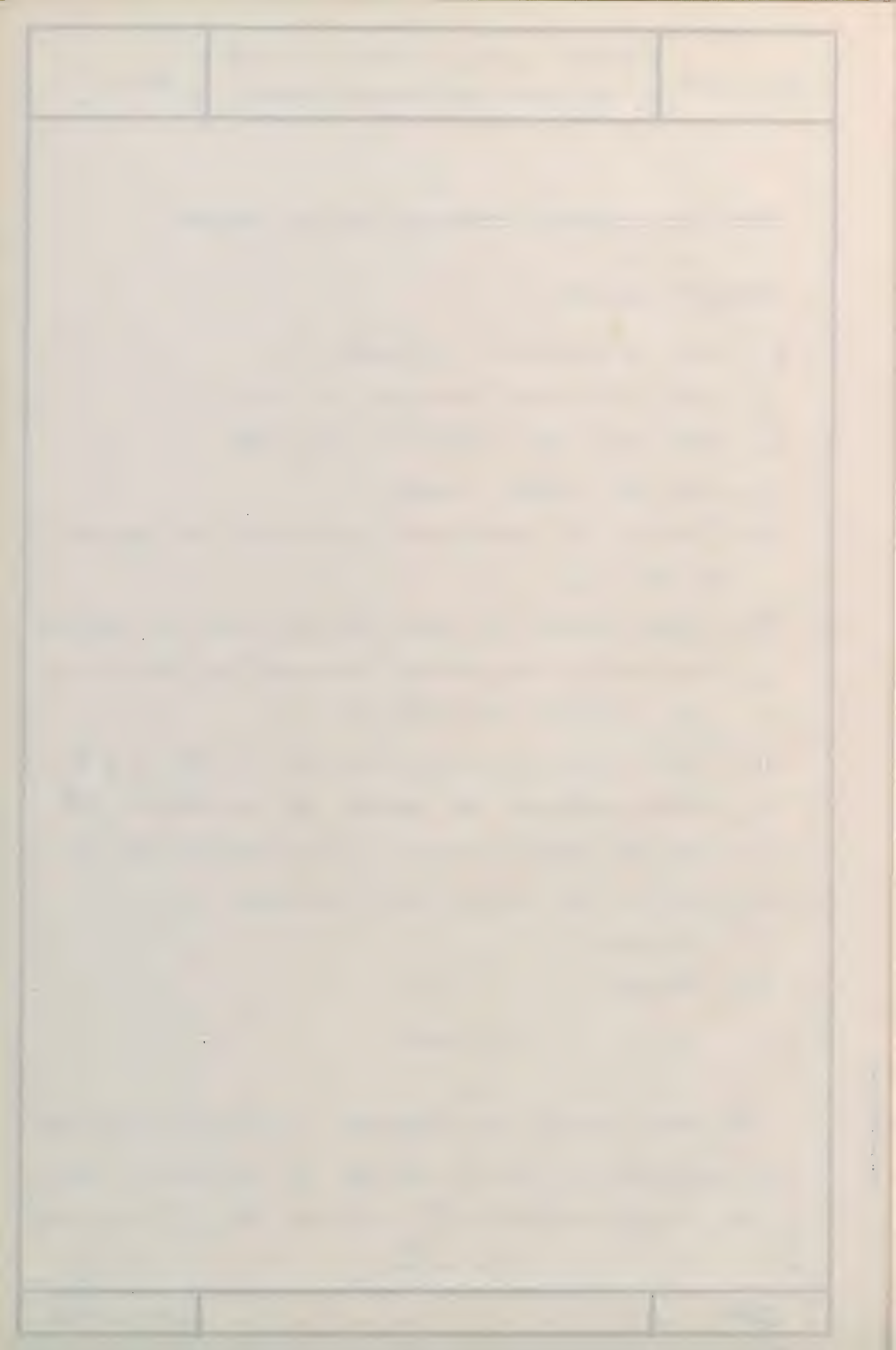
k'_{12} = Apotema del polígono de una cara

S'_{12} = Superficie.

V'_{12} = Volumen.

Los valores métricos del dodecaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_{20} del icosaedro dado, ya que el valor conocido de l'_{12} en función de l_{20} (ver fórm. [2]) es

$$l'_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20}$$



Sustituyendo este valor en las fórmulas 30 al 41 de la lámina 4, tendremos:

$$a'_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{6}\right) l_{20} = \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{12} l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $a'_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} l_{20} =$

$$= \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})}{24} l_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{75} + \sqrt{15}}{24} l_{20} = \frac{2\sqrt{15} + \sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{24} l_{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15} + 6\sqrt{3}}{24} l_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{3}}{12} l_{20}}$$

$$b'_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} l_{20} = \frac{2 + \sqrt{5}}{6} l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $b'_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} l_{20} = \frac{(3 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{24} l_{20} =$

$$= \frac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{24} l_{20} = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{24} l_{20} = \boxed{\frac{2 + \sqrt{5}}{6} l_{20}}.$$

$$c'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} l_{20} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{65 + 29\sqrt{5}}{10}} l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $c'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \frac{1 + \sqrt{5}}{6} l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(1 + \sqrt{5})^2}{40 \times 6^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(1 + 5 + 2\sqrt{5})}{40}} l_{20} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(6 + 2\sqrt{5})}{40}} l_{20} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(3 + \sqrt{5})}{20}} l_{20} =$$



$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{33\sqrt{5}+75+55+25\sqrt{5}}{20}}\, l_{20} = \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{130+58\sqrt{5}}{20}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{5\times 6^2}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5\times 3^2}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}}$$

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times 3\times 6}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{5\times 6}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10\times 3^2}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$f'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $f'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$



$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10 \times 6^2}}\; l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{10 \times 6^2}}\; l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10 \times 6^2}}\; l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5 \times 6^2}}\; l_{20} = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 5}{5 \times 6^2}}\; l_{20} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5 \times 6^2}}\; l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5 \times 3 \times 6}}\; l_{20} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}}$$

$$g'_{12} = i'_{12} = d'_{12} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\; l_{20}$$

$$k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\; l_{20} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\; l_{20} =$

$$= \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{20}}\; l_{20} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{20}}\; l_{20} =$$

$$= \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{20}}\; l_{20} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{10}}\; l_{20} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{10}}\; l_{20} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}}$$

$$S'_{12} = 3 \times \sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\; l_{20}\right)^2 = \frac{1}{6}\sqrt{10 \times (65+29\sqrt{5})} \times l_{20}^2$$

Desarrollo del cálculo anterior: $S'_{12} = 3 \times \sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\; l_{20}\right)^2 =$

$$= 3 \times \sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \frac{(1+\sqrt{5})^2}{36}\; l_{20}^2 = \sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \frac{6+2\sqrt{5}}{12}\; l_{20}^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \times \sqrt{(25+10\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}\; l_{20}^2 = \frac{1}{6}\sqrt{(25+10\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}\; l_{20}^2 =$$



$$= \frac{1}{6}\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})\times 2}\; l_{20}^{2} = \frac{1}{6}\sqrt{(175+70\sqrt{5}+75\sqrt{5}+150)\times 2}\; l_{20}^{2} =$$

$$= \frac{1}{6}\times\sqrt{(325+145\sqrt{5})\times 2}\; l_{20}^{2} = \frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\; l_{20}^{2}$$

$$V'_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\,l_{20}\right)^{3} = \frac{65+29\sqrt{5}}{108}\,l_{20}^{3}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V'_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\,l_{20}\right)^{3} =$

$$= \frac{(7\sqrt{5}+15)(1+\sqrt{5})^{3}}{4\times 6^{3}}\,l_{20}^{3} = \frac{(7\sqrt{5}+15)(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5})}{4\times 6\times 6^{2}}\,l_{20}^{3} =$$

$$= \frac{(7\sqrt{5}+15)(16+8\sqrt{5})}{4\times 6\times 6^{2}}\,l_{20}^{3} = \frac{(7\sqrt{5}+15)(2+\sqrt{5})}{3\times 6^{2}}\,l_{20}^{2} =$$

$$= \frac{14\sqrt{5}+30+35+15\sqrt{5}}{108}\,l_{20}^{3} = \boxed{\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\,l_{20}^{3}}$$

Son útiles las siguientes relaciones:

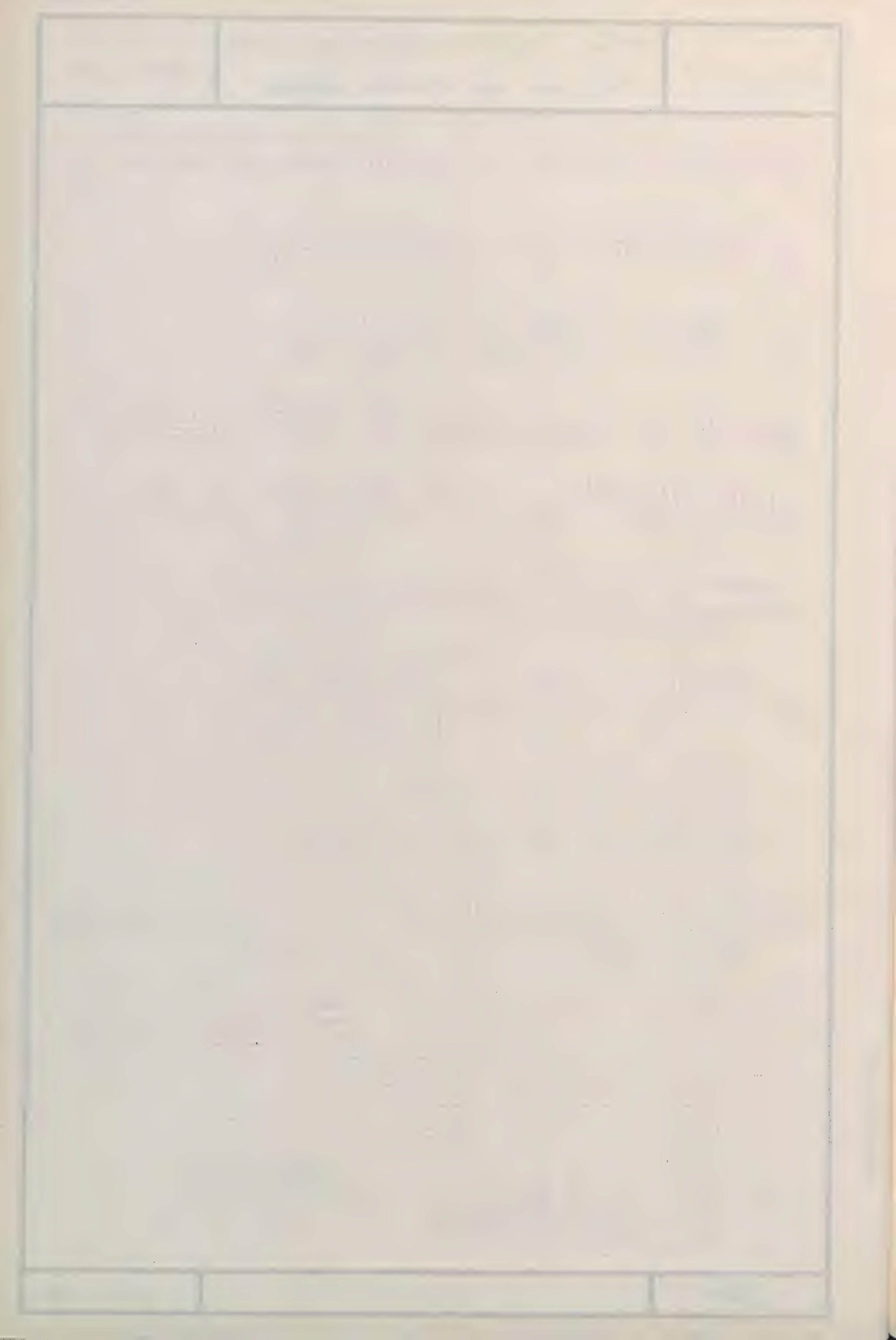
a) $\frac{l_{20}}{l'_{12}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{6}} = \frac{3\times(\sqrt{5}-1)}{2}$ (ver fórmula [2])

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{l_{20}}{l'_{12}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{6}} = \frac{6}{1+\sqrt{5}} =$

$$= \frac{6\times(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{6(\sqrt{5}-1)}{4} = \boxed{\frac{3\times(\sqrt{5}-1)}{2}}$$

b) $\frac{S_{20}}{S'_{12}} = \frac{5\sqrt{3}\;l_{20}^{2}}{\frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\;l_{20}^{2}} = \frac{3\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{2}$

UNE A4 210 X 297



Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{S_{20}}{S'_{12}} = \frac{5\sqrt{3}\ l_{20}^2}{\frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\ l_{20}^2} =$

$= \frac{30\times\sqrt{3}}{\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}} = \frac{30\sqrt{3}\times\sqrt{10(65+29\sqrt{5})}}{10\times(65+29\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{3}\ \sqrt{10(65+29\sqrt{5})}\times(65-29\sqrt{5})}{65^2-(29\sqrt{5})^2} =$

$= \frac{3\sqrt{30\ (65+29\sqrt{5})(65-29\sqrt{5})^2}}{4225-4205} = \frac{3\sqrt{30\ (4225-4205)(65-29\sqrt{5})}}{20} =$

$= \frac{3\sqrt{30\times 20\times(65-29\sqrt{5})}}{20} = \frac{3\times 10\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{20} = \boxed{\frac{3\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{2}}$

c) $\frac{V_{20}}{V'_{12}} = \frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ l_{20}^3}{\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ l_{20}^3} = \frac{9\times(25-11\sqrt{5})}{2}$

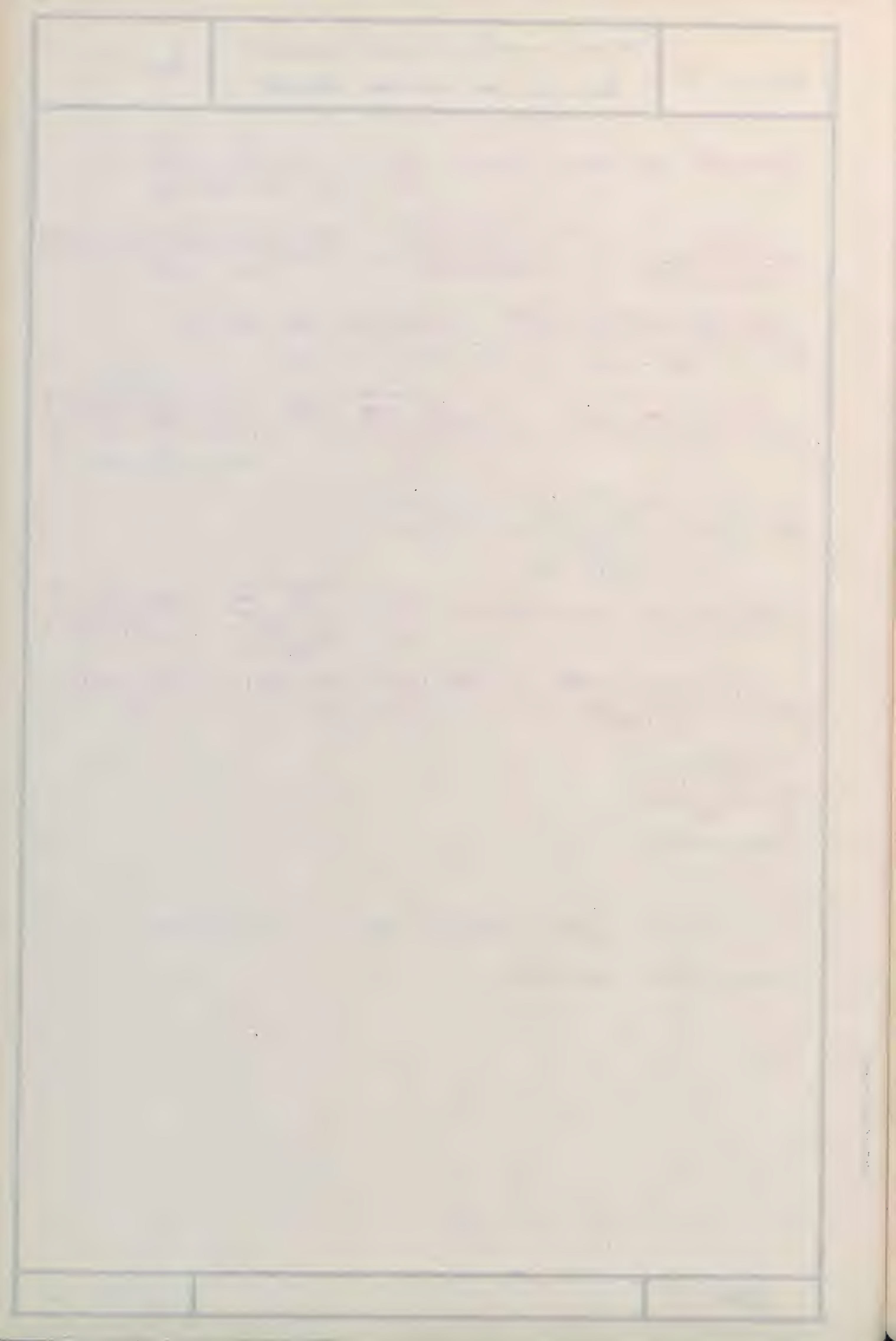
Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{V_{20}}{V'_{12}} = \frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ l_{20}^2}{\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ l_{20}^2} = \frac{108\times(15+5\sqrt{5})}{12\times(65+29\sqrt{5})} =$

$= \frac{9\times(15+5\sqrt{5})(65-29\sqrt{5})}{65^2-(29\sqrt{5})^2} = \frac{9\times(975+325\sqrt{5}-435\sqrt{5}-725)}{4225-4205} = \frac{9\times(250-110\sqrt{5})}{20} =$

$= \boxed{\frac{9\times(25-11\sqrt{5})}{2}}$

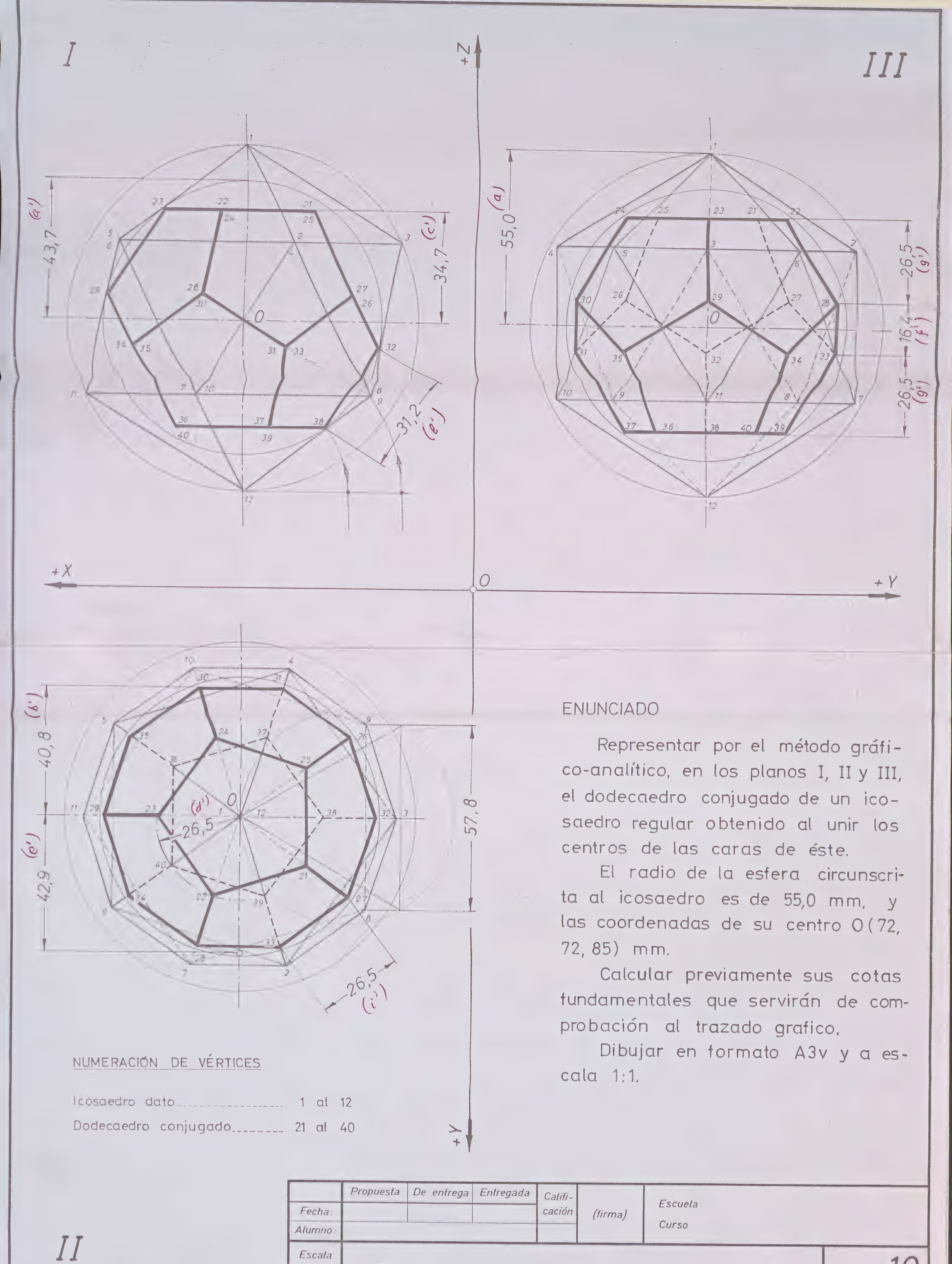
En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados.

UNE A4 210 X 297



CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(109) l'_{12}	$\frac{1+\sqrt{5}}{6}\ l_{20}$	$0{,}53\ 93\ 45 \ldots\ l_{20}$
(110) a'_{12}	$\frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{12}\ l_{20}$	$0{,}75\ 57\ 61 \ldots\ l_{20}$
(111) b'_{12}	$\frac{2+\sqrt{5}}{6}\ l_{20}$	$0{,}70\ 60\ 11 \ldots\ l_{20}$
(112) c'_{12}	$\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0{,}60\ 05\ 69 \ldots\ l_{20}$
(113) d'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	$0{,}45\ 87\ 94 \ldots\ l_{20}$
(114) $2\varphi_{12}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12} = 0{,}85\ 06\ 51 \ldots$ $2\varphi_{12} = 116°\ 33'\ 54{,}2''$
(115) e'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0{,}74\ 23\ 44 \ldots\ l_{20}$
(116) f'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0{,}28\ 35\ 50 \ldots\ l_{20}$
(117) g'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	$0{,}45\ 87\ 94 \ldots\ l_{20}$
(118) i'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	$0{,}45\ 87\ 94 \ldots\ l_{20}$
(119) k'_{12}	$\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0{,}37\ 11\ 72 \ldots\ l_{20}$
(120) S'_{12}	$\frac{1}{6}\times\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\ l_{20}^2$	$6{,}00\ 56\ 91 \ldots\ l_{20}^2$
(121) V'_{12}	$\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ l_{20}^3$	$1{,}20\ 22\ 78 \ldots\ l_{20}^3$
Relaciones entre magnitudes		
$l_{20} : l'_{12}$	$\frac{3\times(\sqrt{5}-1)}{2}$	(122) $1{,}85\ 41\ 03 \ldots$
$S_{20} : S'_{12}$	$\frac{3\times\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{2}$	(123) $1{,}44\ 20\ 08 \ldots$
$V_{20} : V'_{12}$	$\frac{9\times(25-11\sqrt{5})}{2}$	(124) $1{,}81\ 46\ 35 \ldots$



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado grafico.

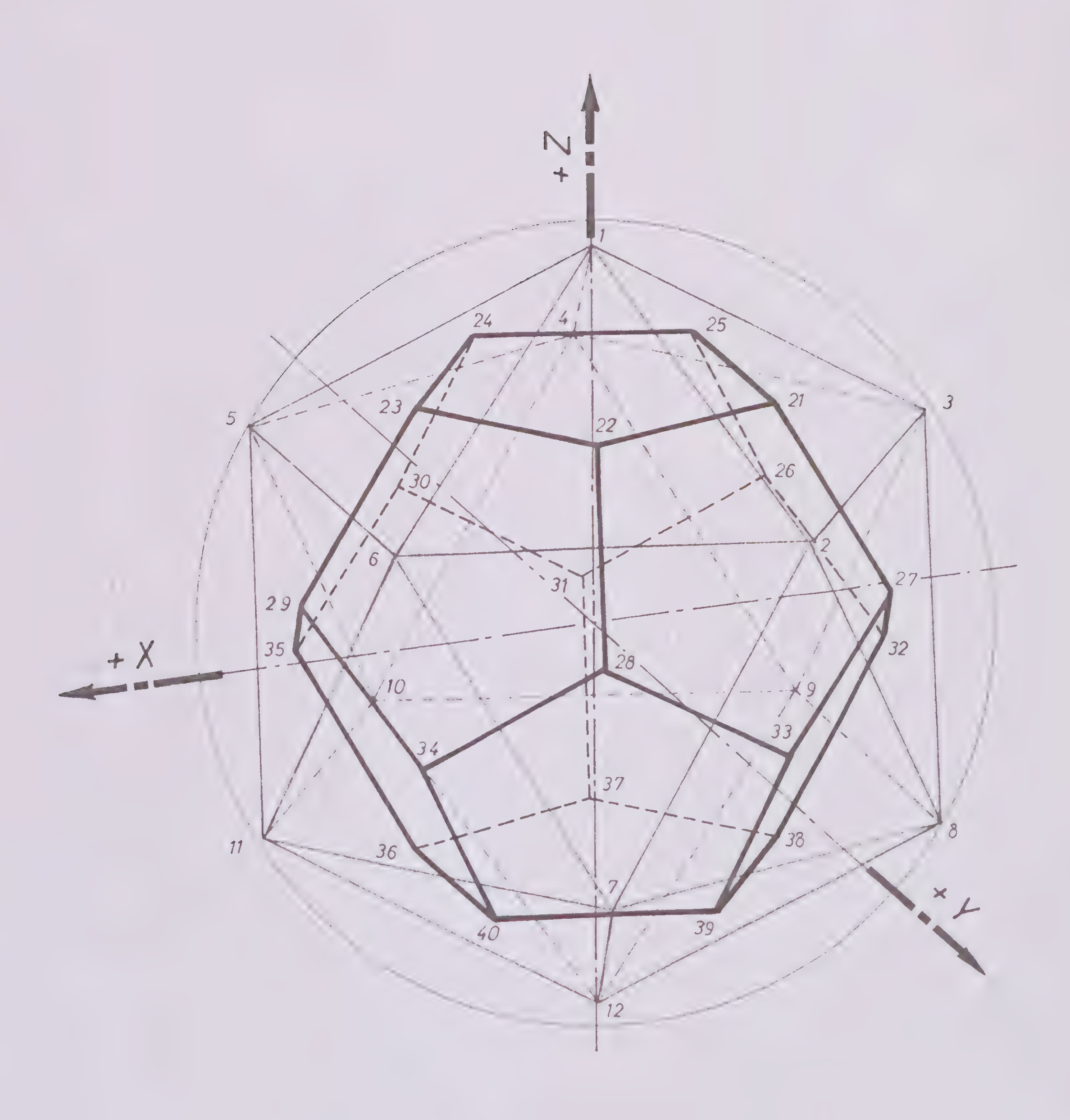
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Icosaedro dato .... 1 al 12

Dodecaedro conjugado .... 21 al 40

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 10 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 11

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular de 89.8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_4 = 89,8

UNE A4 210 X 297



CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 6 a 10 hemos estudiado los poliedros regulares conjugados de los cinco poliedros regulares, obtenidos aquéllos al unir los centros de dos caras contiguas de éstos.

También pueden deducirse los poliedros conjugados de los regulares, por otros procesos geométricos distintos al anterior, con las mismas formas, pero de diferentes dimensiones.

Así pues, en estos nuevos procesos, el conjugado del tetraedro regular será otro tetraedro regular; el del exaedro, un octaedro; el del octaedro, un exaedro; el del dodecaedro, un icosaedro y, finalmente, el del icosaedro, será un dodecaedro (todos regulares y convexos).

El proceso seguido en la generación de los poliedros conjugados de los regulares, desarrollado en las láminas 11-13-14-16-17, consiste en trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro del poliedro dado.

Cada poliedro regular y su conjugado tendrán pues comunes su centro y la esfera tangente a las aristas de ambos.



El poliedro conjugado de un tetraedro regular, es otro tetraedo también regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado, es a su vez igual al dado y las aristas de ambos, a más de ser iguales y perpendiculares, se cortan en sus respectivos puntos medios. En consecuencia, el centro O del tetraedro dado y del tetraedro conjugado, es común y la esfera circunscrita al primero lo es a su vez al segundo; igual ocurre con la esfera tangente a las aristas y la inscrita.

Estas propiedades simplifican notablemente el trazado gráfico.

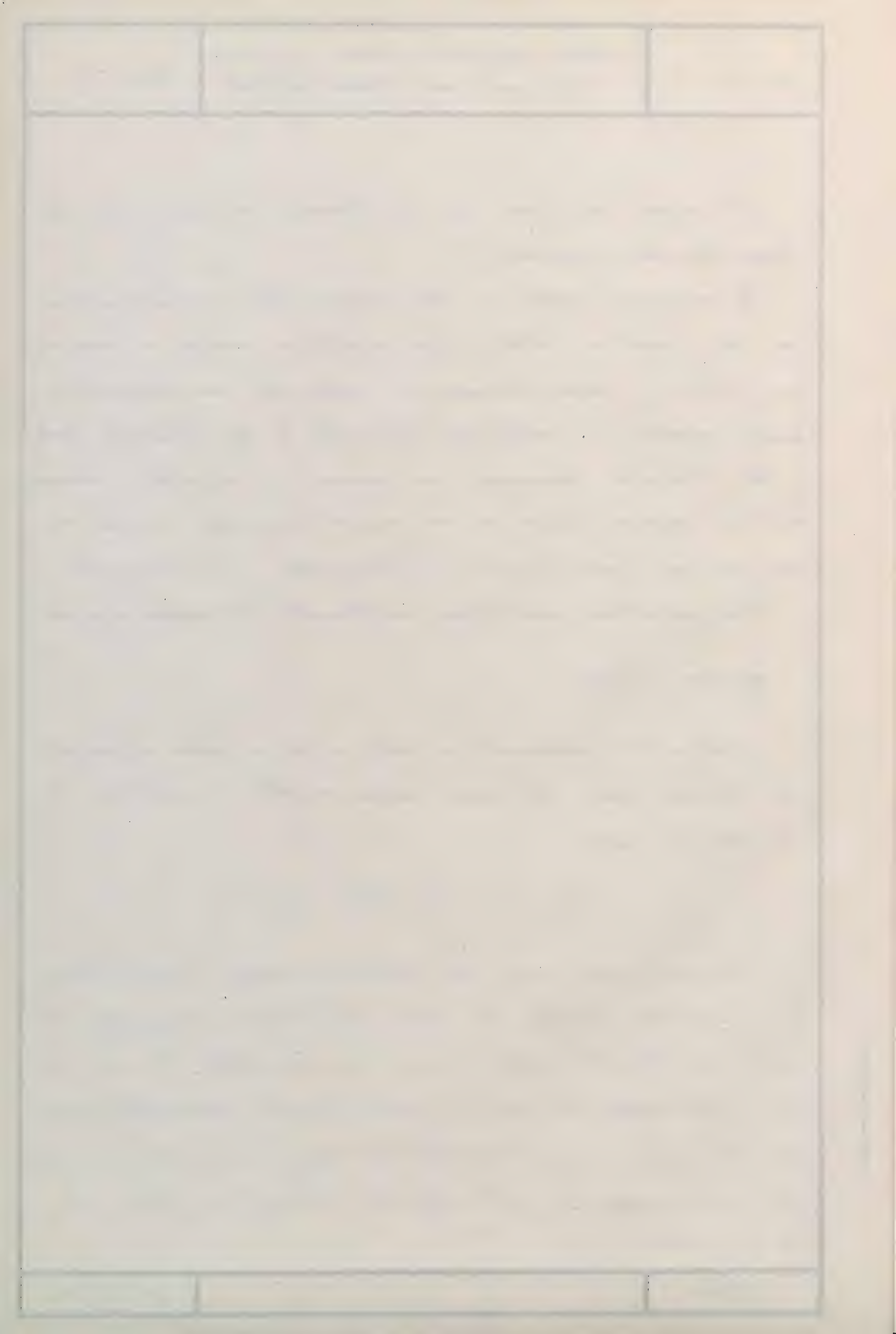
PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el radio r de la esfera circunscrita al tetraedro dado (ver proceso gráfico-analítico de la lám. 1); el radio a será:

$$a_4 = 0,61\ 23\ 72 \times 89,8 = 55,0 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida el centro O en el plano II y conocido el lado, la construcción de la proyección sobre II del tetraedro dado 1-2-3-4 es inmediata. En el plano I determínese el punto 4 sobre la esfera circunscrita, que dista del 1 la magnitud del lado dado, con lo cual se completa dicha proyección. La proyección sobre III, se deduce de la I y la II.

UNE A4 210 X 297



La representación del tetraedro conjugado es simétrica del dado con respecto al centro O de la esfera circunscrita, cuya propiedad se conserva en sus proyecciones; ello permite completar la figura con el conjugado pedido.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la figura, referente al poliedro conjugado, es idéntico al desarrollado en la lámina 1, cuyos valores reproducimos, tomando como exacto el radio de la esfera circunscrita, con 55 mm.

$l'_4 = 55 : 0,61\ 23\ 72 \ldots = 89,81\ 46\ 88 \ldots$ mm

$a'_4 = 0.61\ 23\ 72 \times 89,81\ 46\ 88 = 55,0$ mm

$b'_4 = 0.35\ 35\ 53 \times$ id $= 31,8$ "

$c'_4 = 0.20\ 41\ 24 \times$ id $= 18,3$ "

$d'_4 = 0.57\ 73\ 50 \times$ id $= 51,8$ "

$2\varphi_4 = 70°\ 31'\ 43''$

$k'_4 = 0.28\ 86\ 75 \times$ id $= 25,9$ "

$h'_4 = 0.81\ 64\ 97 \times$ id $= 73,3$ "

FIGURA CORPÓREA

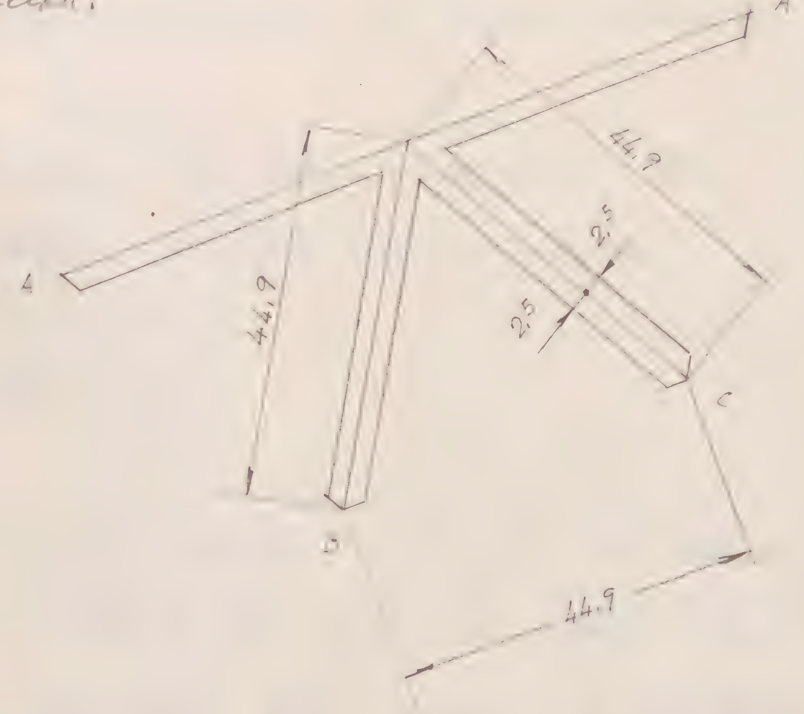
El tetraedro conjugado se obtiene por acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de 89.8 mm de lado.

El tetraedro dado se obtiene formando previamente 4 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas



caras laterales son triángulos equiláteros de 44,9 mm de lado (mitad del lado dato); estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las cuatro caras del conjugado de forma que sus vértices estén en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el tetraedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 4 pirámides triangulares, por las obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



Estas cuatro pirámides se acoplarán al tetraedro conjugado colocando sus vértices A, B, C en los puntos medios de las mismas.

UNE A4 210 X 297



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada:

l'_4 = Lado del tetraedro conjugado

a'_4 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_4 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_4 = Radio de la esfera inscrita

d'_4 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_4$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k'_4 = Apotema del polígono de una cara

h'_4 = Altura del tetraedro conjugado

S'_4 = Superficie

V'_4 = Volumen.

Siendo el tetraedro conjugado del tetraedro regular, de igual dimensión que el dado, los valores del cuadro sinóptico que damos a continuación, son iguales a los dados en el de la lámina 1.



CUADRO SINÓPTICO

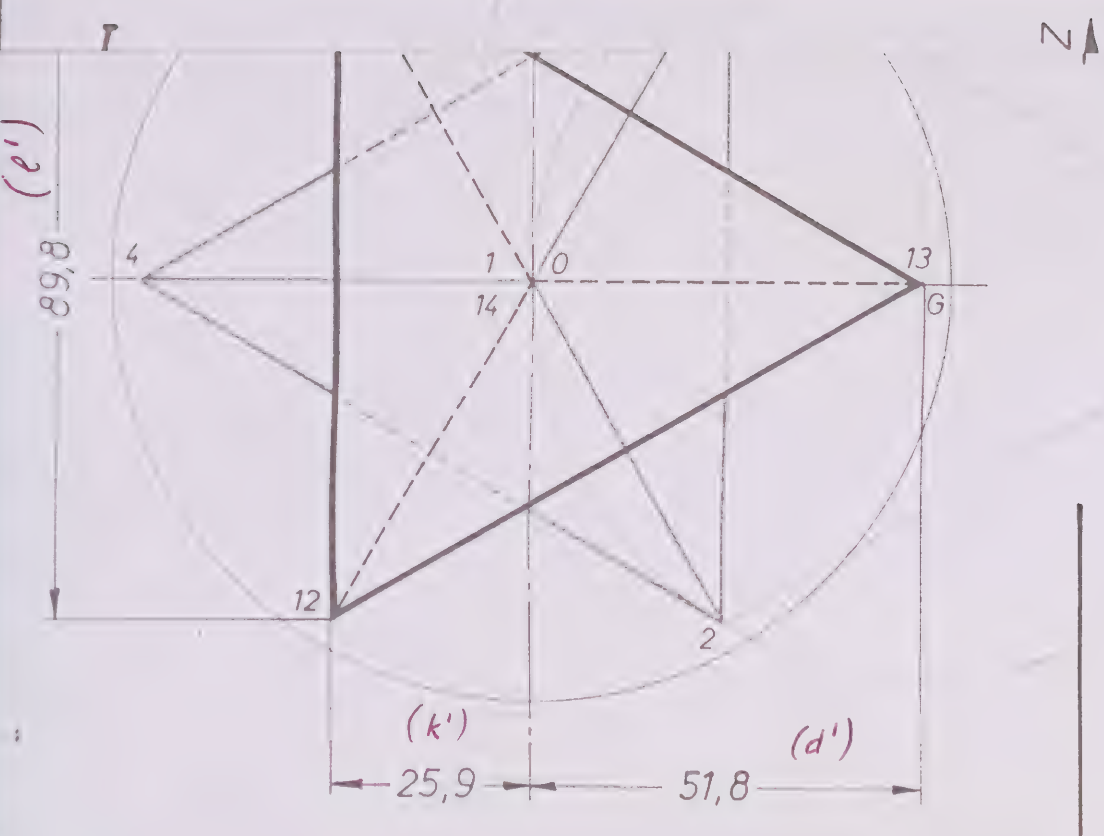
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l'_4	(125) $1 \quad l_4$	$1{,}00\ 00\ 00 \ldots\ l_4$
a'_4	(126) $\frac{\sqrt{6}}{4} \quad l_4$	$0{,}61\ 23\ 72 \ldots\ l_4$
b'_4	(127) $\frac{\sqrt{2}}{4} \quad l_4$	$0{,}35\ 35\ 53 \ldots\ l_4$
c'_4	(128) $\frac{\sqrt{6}}{12} \quad l_4$	$0{,}20\ 41\ 24 \ldots\ l_4$
d'_4	(129) $\frac{\sqrt{3}}{3} \quad l_4$	$0{,}57\ 73\ 50 \ldots\ l_4$
$2\varphi_4$	(130) $\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{sen}\ \varphi_4 = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots$ $2\varphi_4 = 70^\circ\ 31'\ 43{,}4''$
k'_4	(131) $\frac{\sqrt{3}}{6} \quad l_4$	$0{,}28\ 86\ 75 \ldots\ l_4$
h'_4	(132) $\frac{\sqrt{6}}{3} \quad l_4$	$0{,}81\ 64\ 97 \ldots\ l_4$
S'_4	(133) $\sqrt{3} \quad l_4^2$	$1{,}73\ 20\ 51 \ldots\ l_4^2$
V'_4	(134) $\frac{\sqrt{2}}{12} \quad l_4^3$	$0{,}11\ 78\ 51 \ldots\ l_4^2$

Relaciones entre magnitudes

(135) $l_4 : l'_4 = 1 \qquad S_4 : S'_4 = 1 \qquad V_4 : V'_4 = 1$

UNE A4 210 X 297





III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

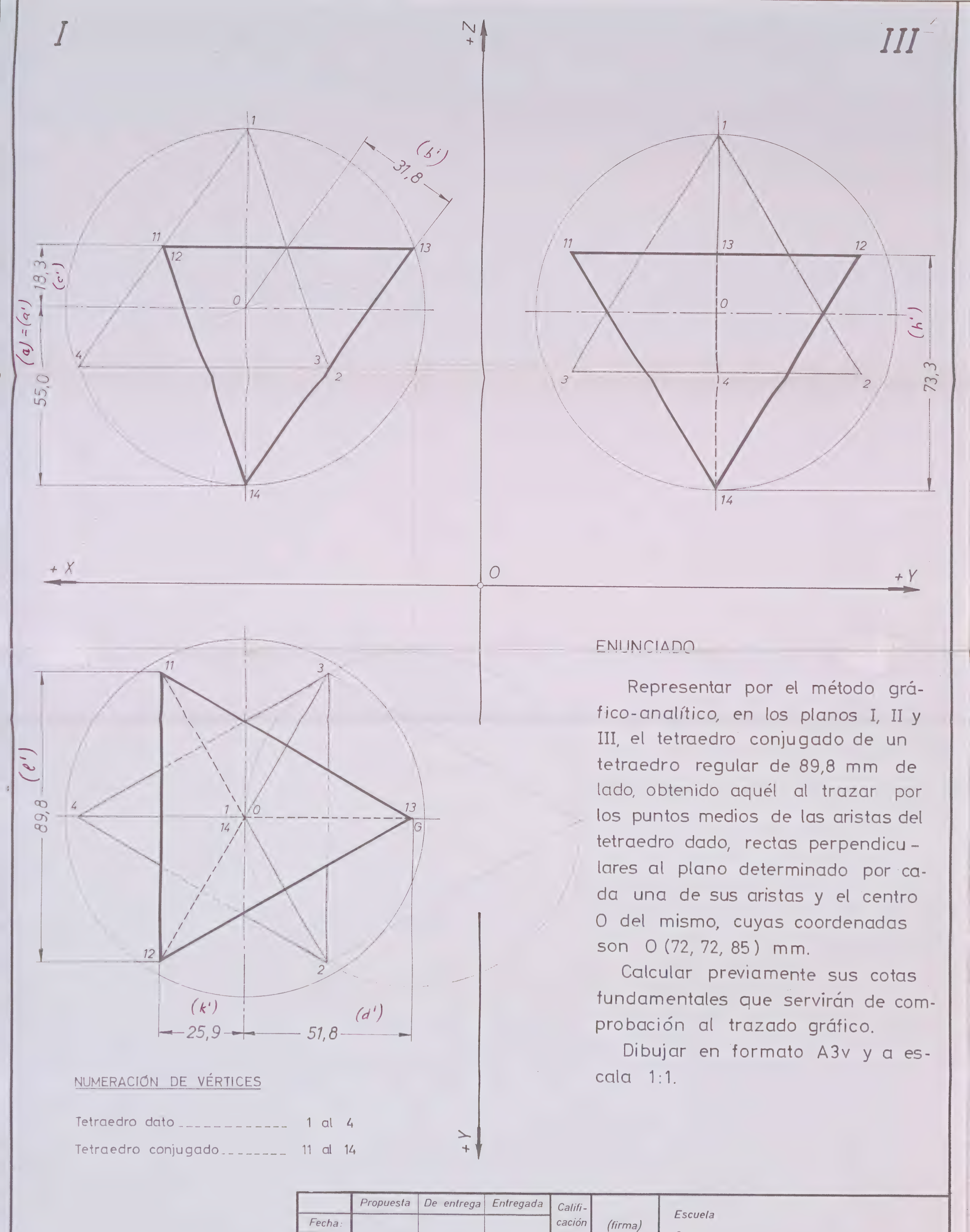
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato .... 1 al 4

Tetraedro conjugado .... 11 al 14

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 11 — Curso 19 -19



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

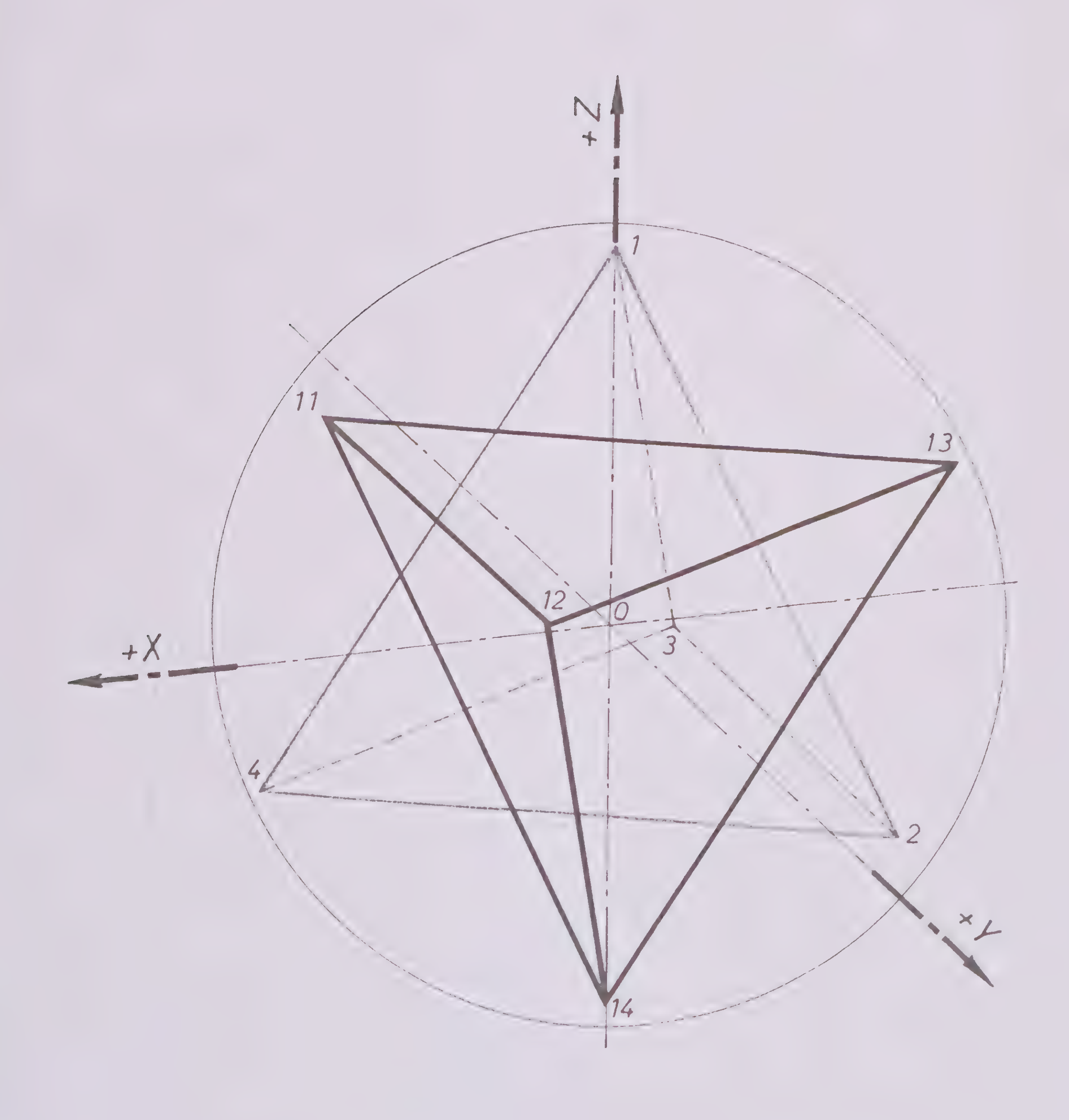
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato ____________ 1 al 4

Tetraedro conjugado ________ 11 al 14

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 11 Curso 19 - 19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 12

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

$l_4 = 89.8$ mm

$l'_4 = 89.8$ mm

UNE A4 210 X 297

17 - 3 - 72

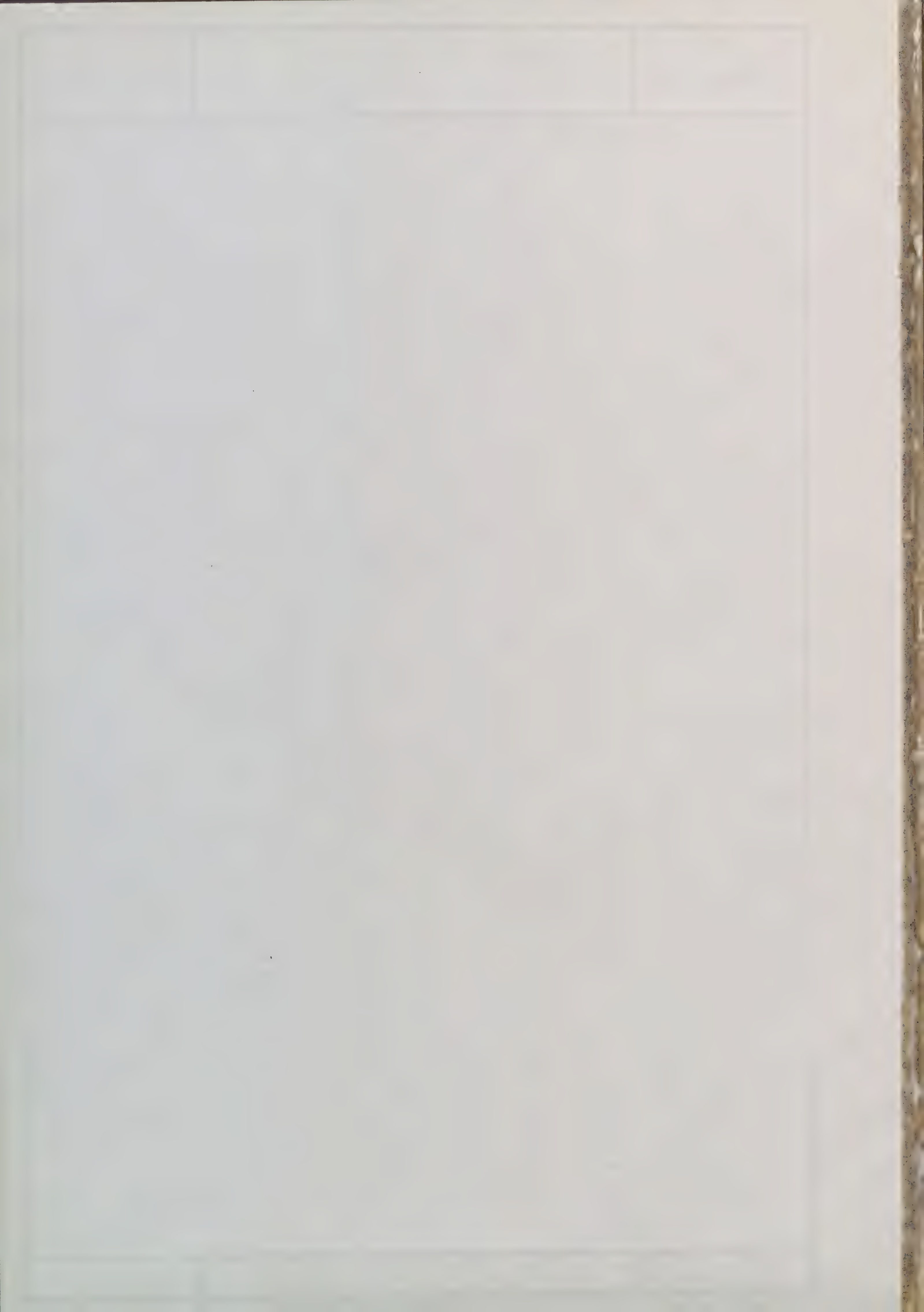


Lámina 12	Poliedros regulares convexos conjugados Conjugado del TETRAEDRO REGULAR	Hoja nº 1

El poliedro representado en la lámina 12, intersección de un tetraedro regular con su conjugado (simétrico con respecto al centro del tetraedro dado), se obtiene completando el trazado de la lámina 11, con los triángulos que se forman al ser cortado cada ángulo sólido del tetraedro dado por las caras del conjugado. Estas intersecciones serán pues de triángulos equiláteros cuyos vértices estarán en los puntos medios de las aristas de ambos poliedros.

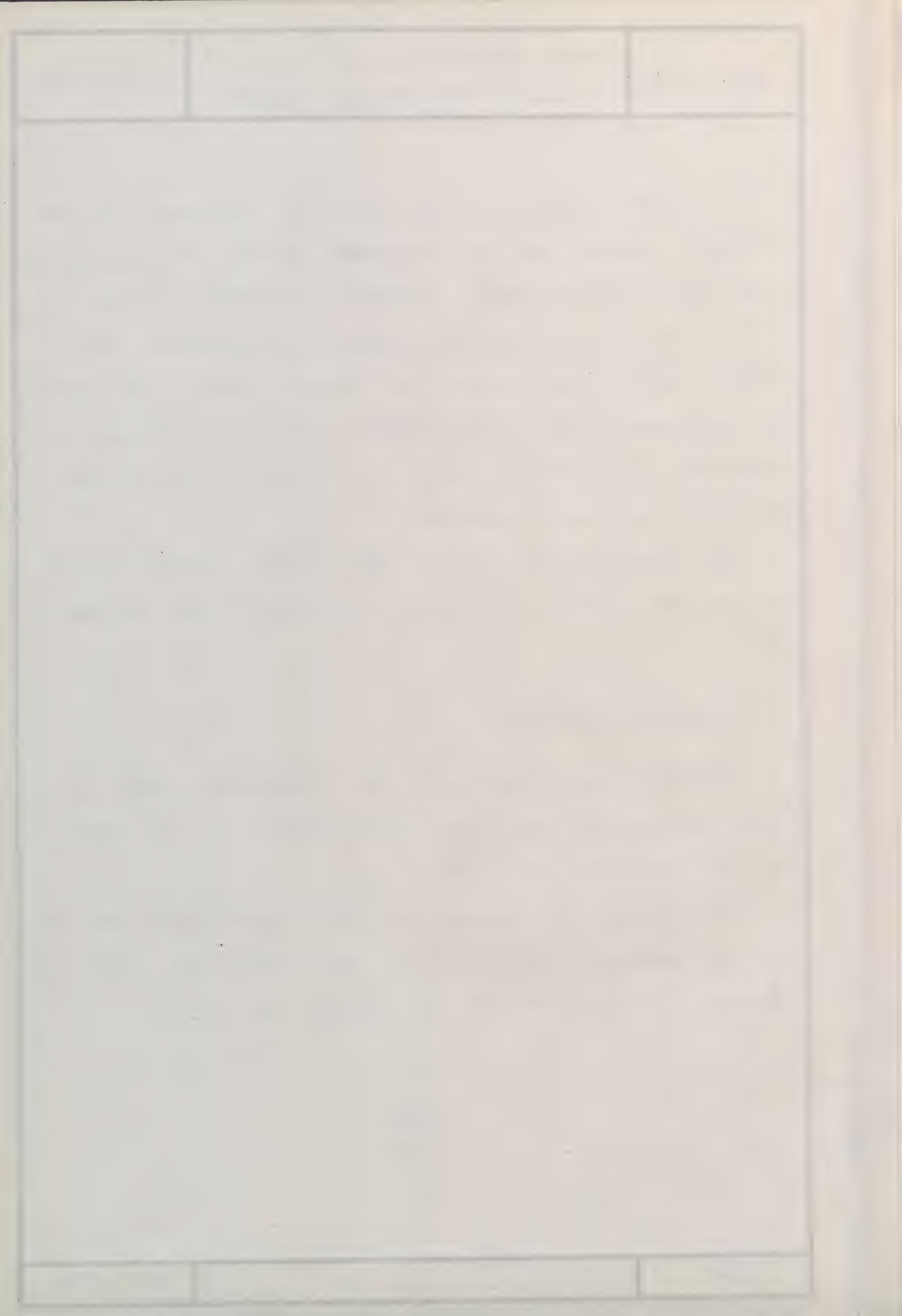
El "Proceso gráfico" y el "Proceso gráfico-analítico" de la mencionada lámina 11 sirve igualmente para este ejercicio.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 pirámides rectas (sin base) compuesta cada una de 3 triángulos equiláteros de 44,9 mm. de lado. $\left(\frac{l_4}{2}\right)$.

Este poliedro es cóncavo, ya que la prolongación del plano de cualquier cara de uno de los tetraedros deja en distintos semiespacios a los vértices del otro.

EG		17 - 3 - 72



CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

α = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras secantes

El diedro α, formado por una cara cualquiera del tetraedro dado, con la cara secante del conjugado, es suplementario del diedro 2φ del tetraedro regular; su valor será pues:

Fórmula 135,1 $$\boxed{\alpha} = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - 70^\circ\, 31'\, 43{,}4'' = \boxed{109^\circ\, 28'\, 16{,}6''} \quad [1]$$

S = Area lateral en función de l_4

La superficie lateral está compuesta por $8 \times 3 = 24$ triángulos equiláteros de lado $l' = \frac{l_4}{2}$; por consiguiente su valor será:

$$\boxed{S} = 24 \times \left(\frac{l'_4}{2}\, h'\right) = 24 \times \left[\frac{l'_4}{2} \times \left(\frac{l'_4}{2}\sqrt{3}\right)\right] = 24 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\, l'^{2}_4\right) = 6\sqrt{3}\left(\frac{l_4}{2}\right)^2 =$$

Fórmula 135,2 $$\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}\, l_4^2} = 2{,}59\,80\,76\ldots\, l_4^2 \quad [2]$$

V = Volumen en función de l_4

El volumen se compondrá de un núcleo (octaedro regular de lado $\frac{l_4}{2}$) y de ocho tetraedros regulares también de lado $\frac{l_4}{2}$). Así pues tendremos:

Fórmula 135,3

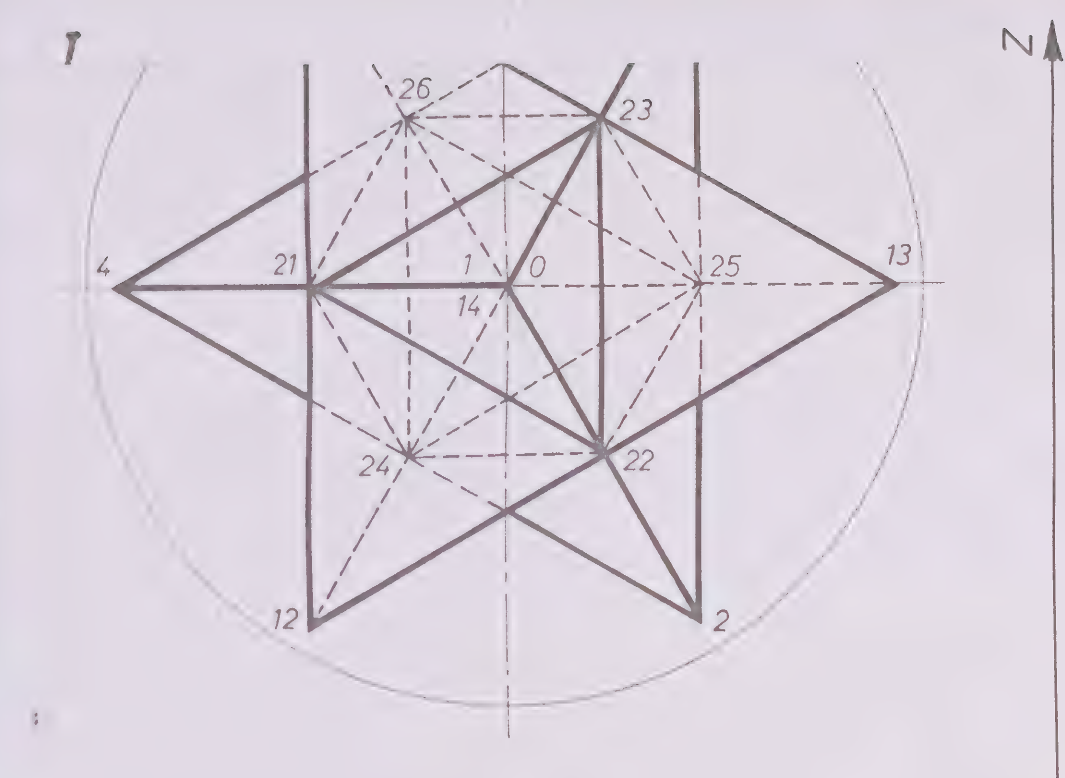
$$\boxed{V} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{l_4}{2}\right)^{3\,*} + 8 \times \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{l_4}{2}\right)^{3\,**} = \left(\frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{8\sqrt{2}}{96}\right) l_4^3 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{8}\, l_4^3} = 0{,}17\,67\,77\ldots\, l_4^3 \quad [3]$$

* Lám. 3, fórmula 28 ; ** Lám. 1, fórmula 9



I

III



Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato .... 1 al 4

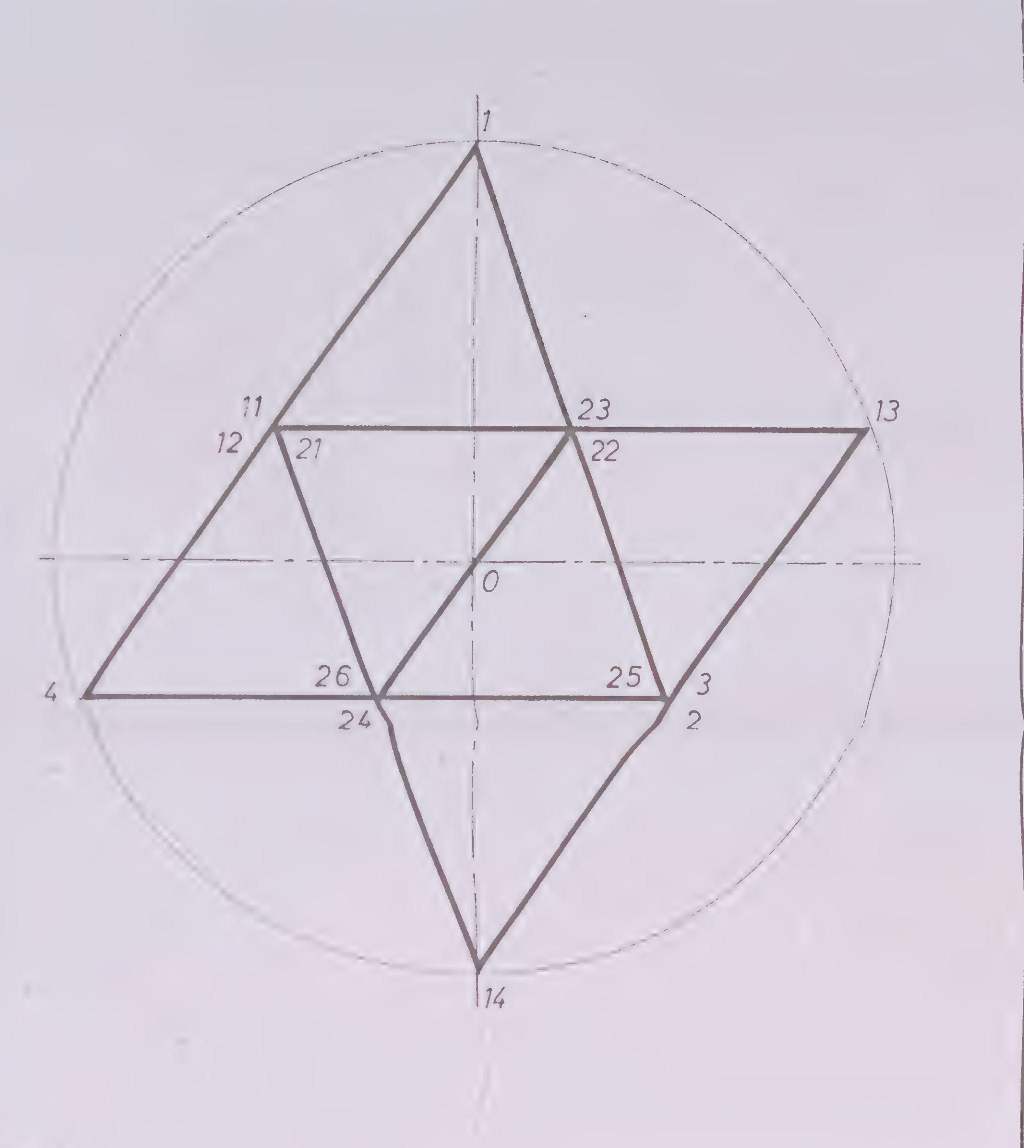
Tetraedro conjugado .... 11 al 14

Núcleo (octaedro regular) .... 21 al 26

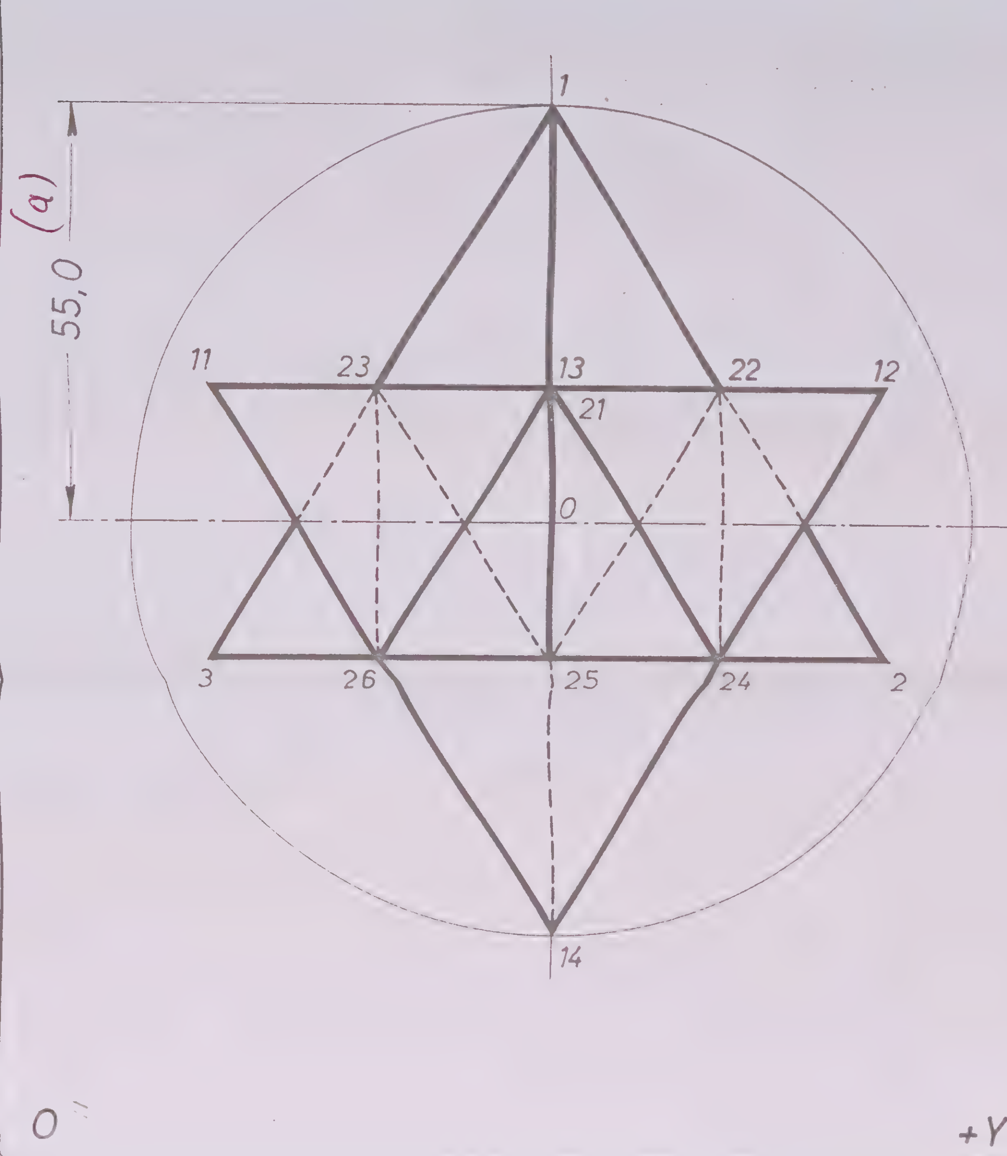
II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación		
Fecha:					(firma)	Escuela Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 12 Curso 19 -19

I



III

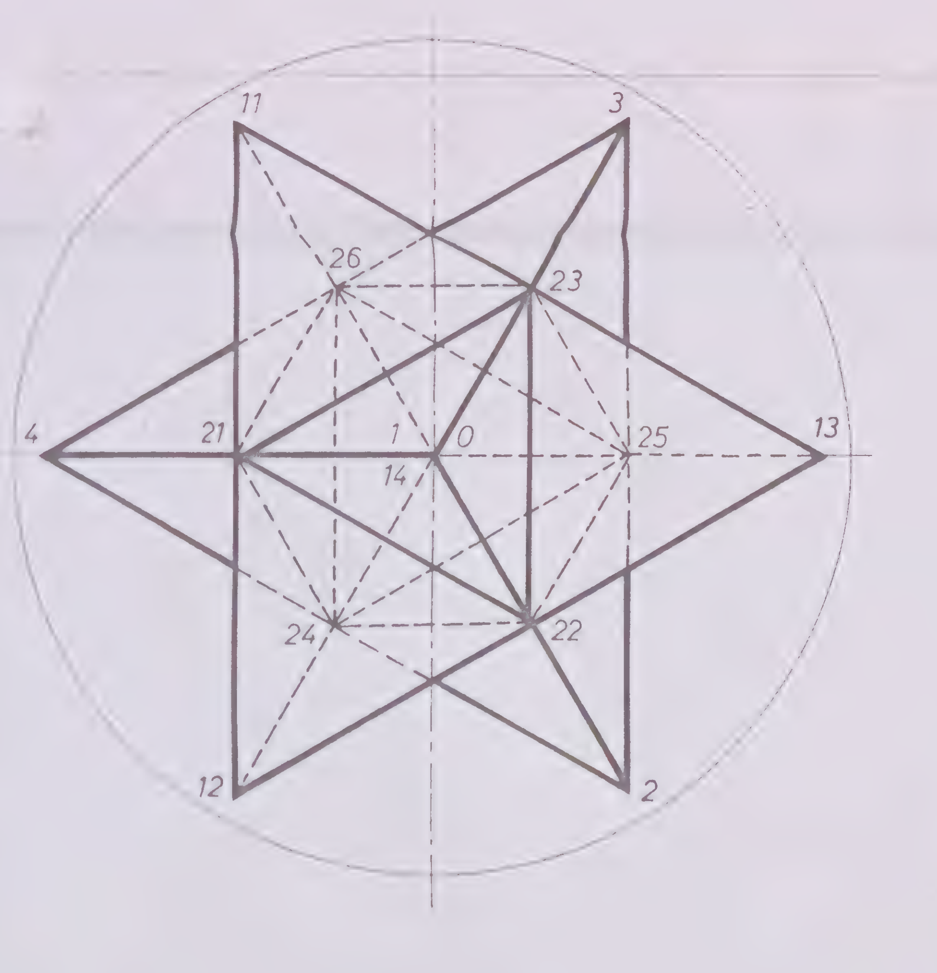


+Z

+X

O

+Y



+Y

II

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

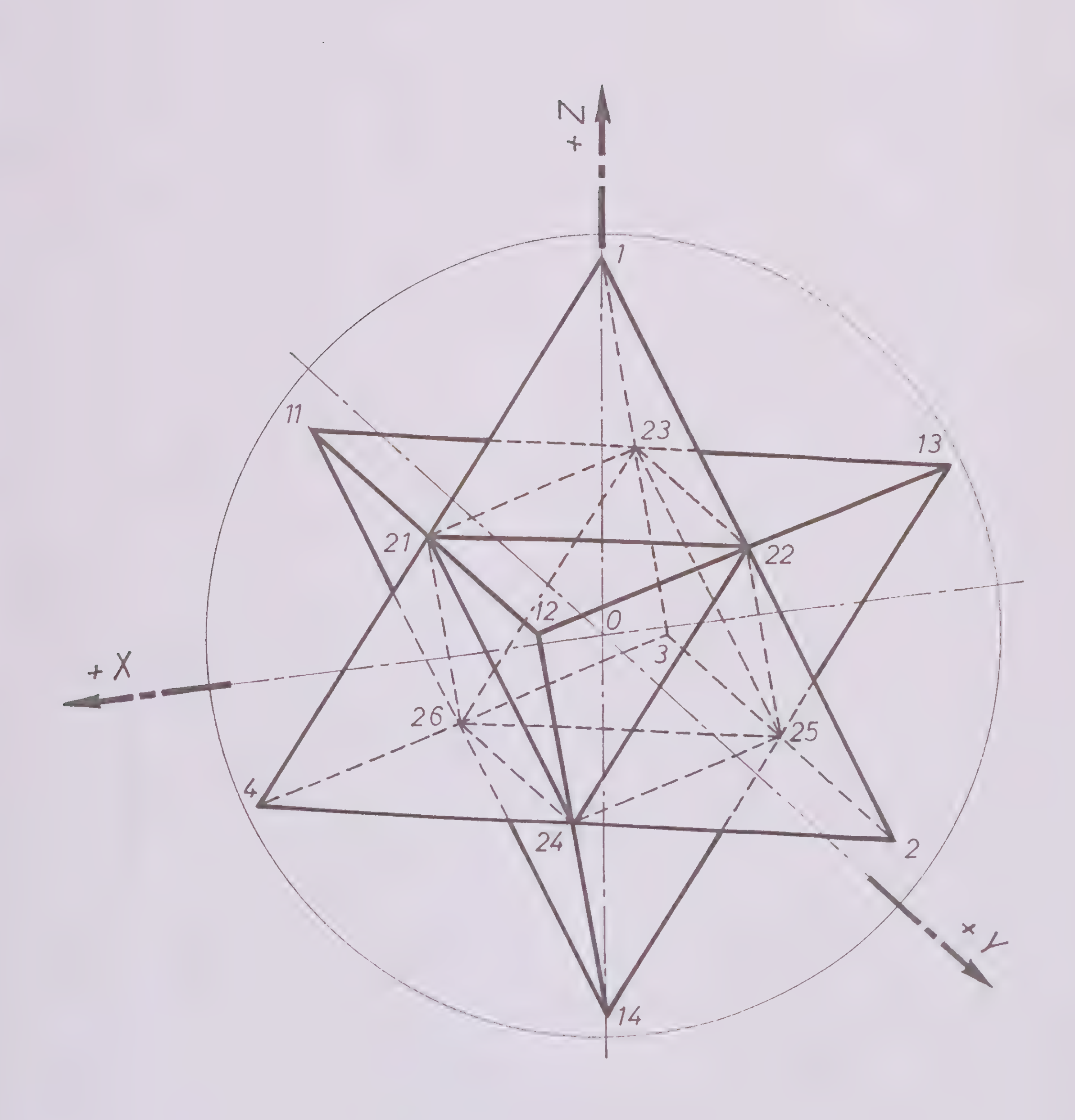
Tetraedro dato................. 1 al 4

Tetraedro conjugado.......... 11 al 14

Núcleo (octaedro regular)... 21 al 26

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 12 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 13	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS B) Centros de aristas	13

Lámina 13

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular de 55,0 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del exaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_6 = 55 mm

UNE A4 210 X 297

		20 - 2 - 72

El poliedro conjugado de un exaedro regular es un otaedro regular; los centros de ambos poliedros son coincidentes.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del exaedro, y ambas se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos ortogonalmente los vértices del octaedro conjugado, sobre las respectivas caras del exaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cada cara cuadrada del exaedro.

Estas propiedades nos permiten resolver fácilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Procederemos previamente a la representación del exaedro dado (en los planos I, II y III) cuyo lado, conocido, es de 55,2 m m. Para ello utilizaremos el trazado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 2.

Seguidamente, completaremos en el plano II la proyección del octaedro pedido, cuyo contorno es un cuadrado cuyos lados son perpendiculares a las diagonales del cuadrado proyección del exaedro sobre II, pasando dichos lados por los vértices del mismo.



Obtenida la proyección sobre II del octaedro pedido, se deduce fácilmente las proyecciones del mismo sobre I y III (iguales) así como el lado del octaedro y radio de la esfera circunscrita que se obtienen en su verdadera magnitud en II.

Con la numeración adecuada de los vértices y centro de ambos poliedros quedará completada la representación pedida.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lámina 13 se desarrolla basándose en el efectuado en la lámina 3, en función del lado l'_8 del octaedro conjugado.

Previamente se determinará el radio a'_8 de la esfera circunscrita al mismo, teniendo en cuenta la igualdad, en ambos poliedros, del radio de la esfera tangente a las aristas.

El radio b_6 de la esfera tangente a las aristas del exaedro dado, tiene por valor, en función de l_6

$$b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = b'_8 \qquad [1]$$

y por otra parte, el lado l'_8 del octaedro conjugado en función de b'_8, es

$$l'_8 = 2\, b'_8 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \sqrt{2}\; l_6 \qquad [2]$$



Conocido l'_8 en función de l_6, se calcularán los siguientes valores (ver tabla figura 3):

$$l'_8 = \sqrt{2}\ l_6 = 1,41\ 42\ 13\ 56\ 24 \ldots \times 55,0 = 77,78\ 17\ 46 \ldots$$

7 $a'_8 = 0,70\ 71\ 07 \times 77,78\ 17\ 46 = 55,0$ mm

$b'_8 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id $= 38,9$ "

$c'_8 = 0,40\ 82\ 48 \times$ id $= 31,8$ "

$d'_8 = 0,57\ 73\ 50 \times$ id $= 44,9$ "

$2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16''$

$k'_8 = 0,28\ 86\ 75 \times$ id $= 22,5$ "

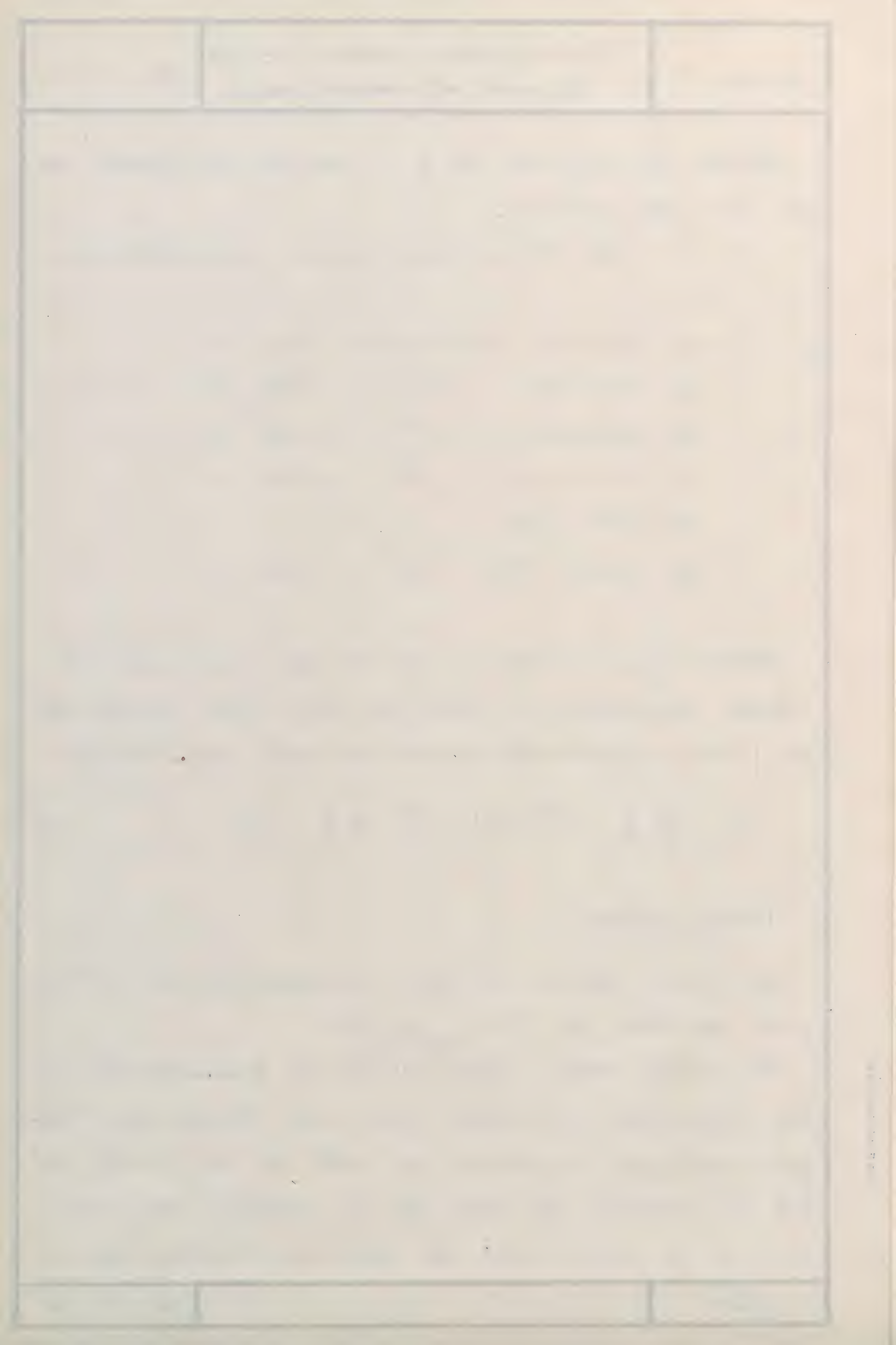
Obsérvese que el radio a'_8 de la esfera circunscrita al octaedro conjugado, es igual al lado l_6 del exaedro dado, lo cual se demuestra teniendo en cuenta que (ver [2]):

$$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\,b'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\ l_6 = l_6 \qquad [4]$$

FIGURA CORPÓREA

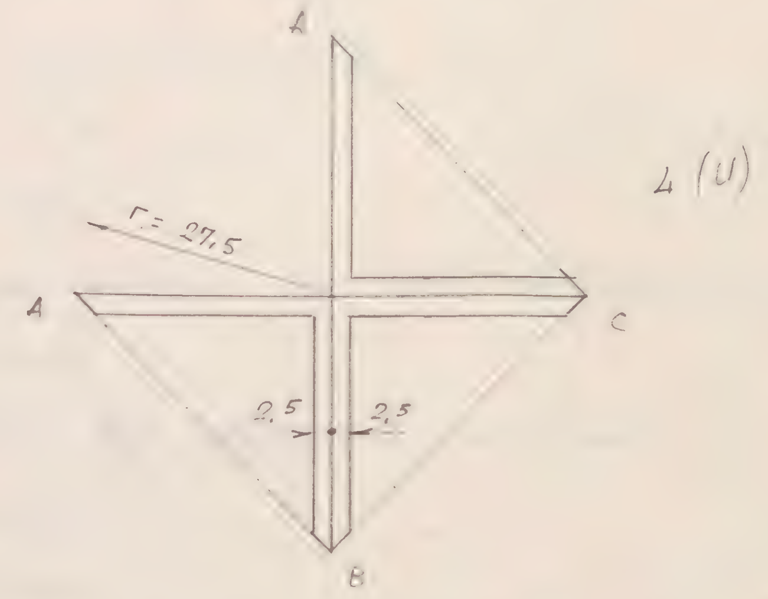
El octaedro conjugado se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de 77,8 mm de lado.

El exaedro dado se ~~obtiene~~ (formando) previamente 8 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas caras laterales son 3 triángulos rectángulos e isósceles de catetos 27,5 mm (mitad del lado del exaedro); estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las ocho caras del conjugado, de forma que sus



vértices están en los puntos medios de las aristas de aquel.

También puede obtenerse el exaedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 4 pirámides triangulares, por las obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



Estas cuatro pirámides se acoplarán al octaedro conjugado, colocando sus vértices A, B, C, en los puntos medios de las aristas.

—



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_8 = Lado del octaedro conjugado.

a'_8 = Radio de la esfera circunscrita al mismo

b'_8 = Radio de la esfera tangente a las aristas

c'_8 = Radio de la esfera inscrita

d'_8 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara

$2\varphi_8$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k'_8 = Apotema del polígono de una cara.

S'_8 = Superficie.

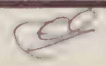
V'_8 = Volumen.

Los valores anteriores del octaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_6 del exaedro dado, ya que el valor conocido de l'_8 en función de l_6 (ver fórmula [2], es

$$l'_8 = \sqrt{2}\ l_6$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 21 a 28 de la lámina 3, tendremos:

$$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\ l_6 = l_6 \ ; \qquad b'_8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l_6$$



30 - 3 - 72



$$c'_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{12}}{6}\ l_6 = \frac{2\sqrt{3}}{6}\ l_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ l_6 ; \qquad d'_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{6}}{3}\ l_6$$

$$k'_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{6}}{6}\ l_6 ; \qquad S'_8 = 2\sqrt{3} \times \left(\sqrt{2}\ l_6\right)^2 = 4\sqrt{3}\ l_6^2$$

$$V'_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\sqrt{2}\ l_6\right)^3 = \frac{4}{3}\ l_6^3 .$$

Son útiles las siguientes relaciones:

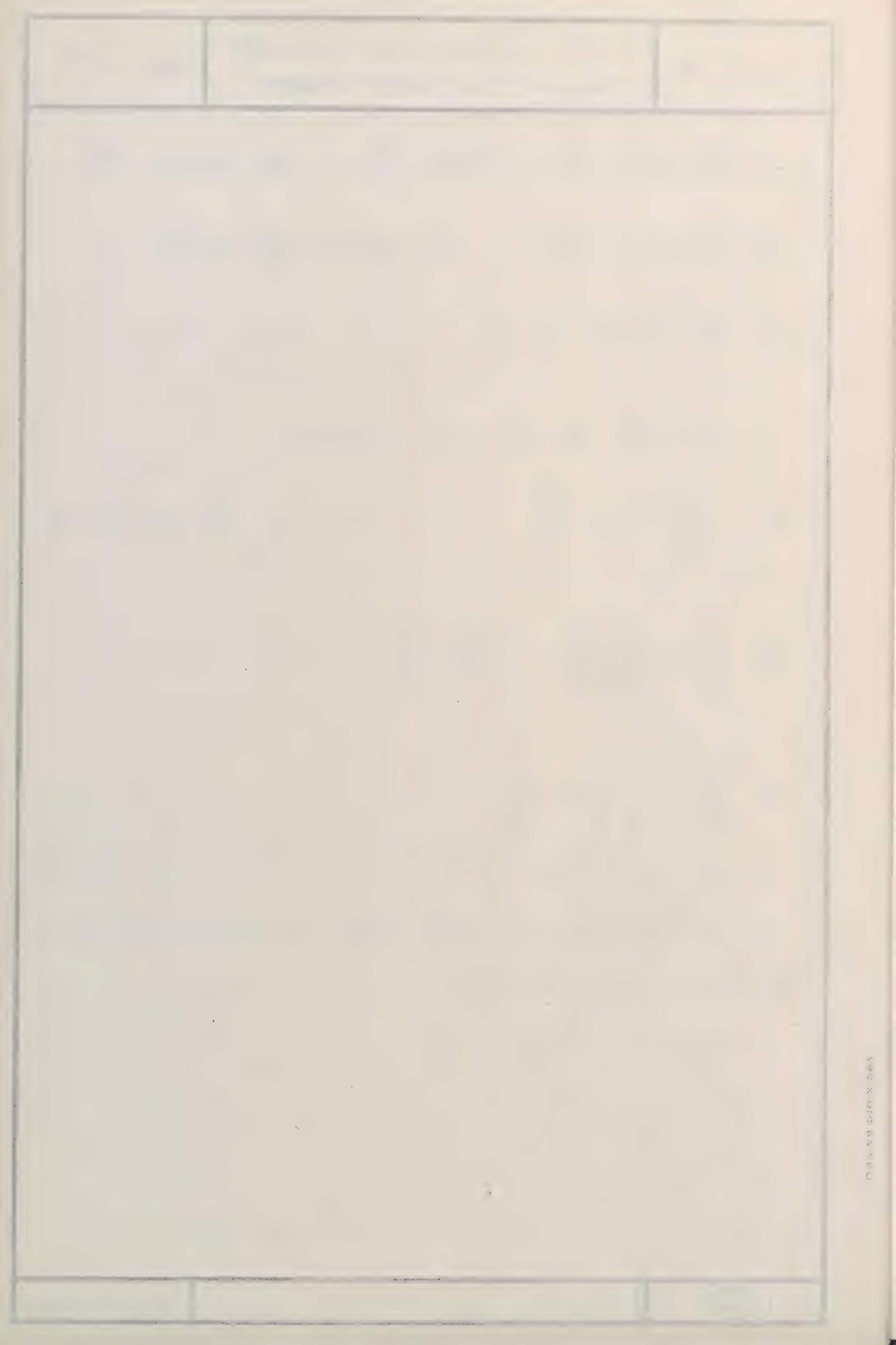
a) $$\frac{l_6}{l'_8} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ (ver fórmula [2])

b) $$\frac{S_6}{S'_8} = \frac{6\ l_6^2}{4\sqrt{3}\ l_6^2} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $$\frac{V_6}{V'_8} = \frac{l_6^3}{\frac{4}{3}\ l_6^3} = \frac{3}{4}$$

En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados.

UNE A4 210 X 297



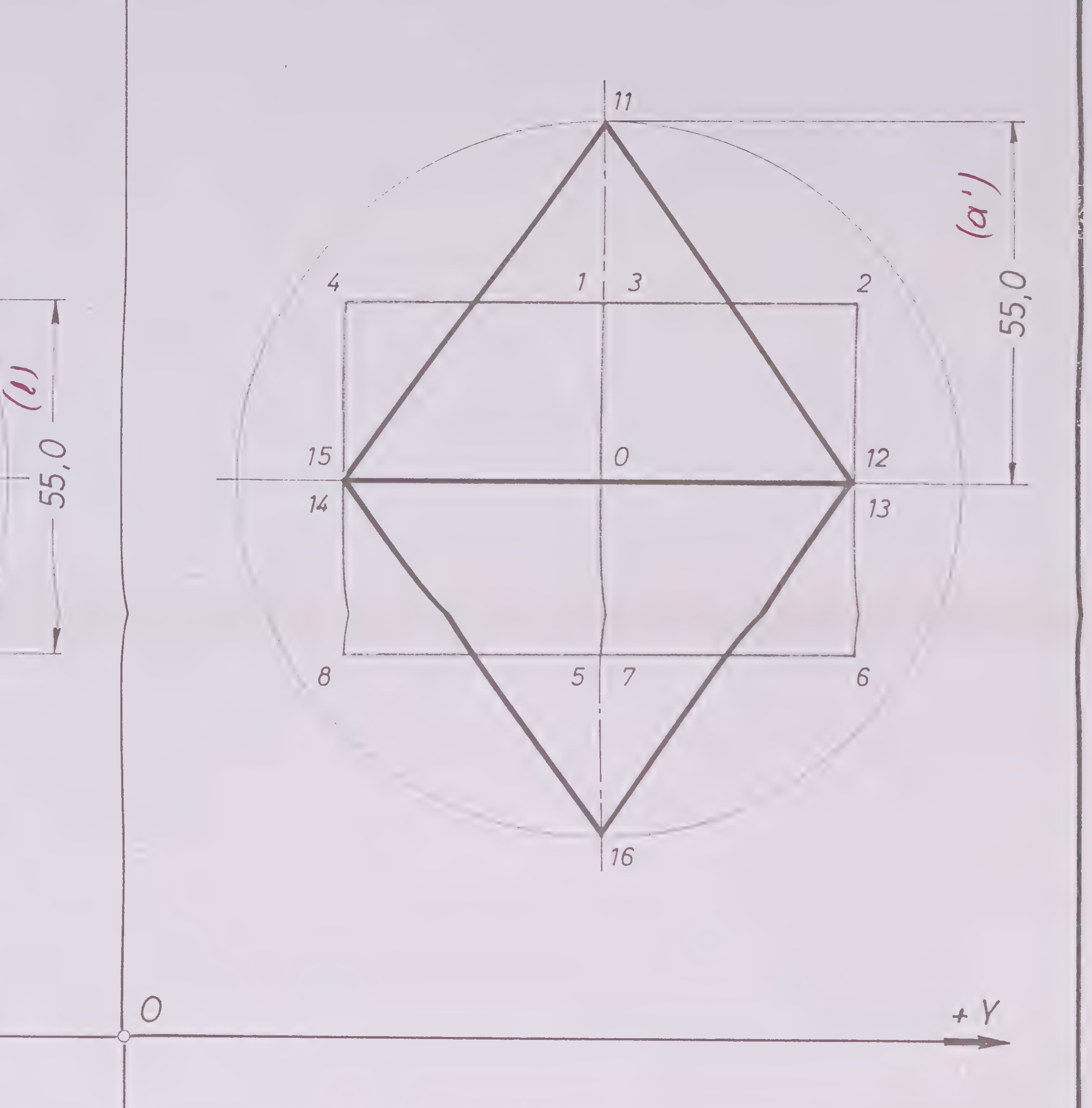
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(136) l'_8	$\sqrt{2} \quad l_6$	$1,41\ 42\ 14 \ldots \ l_6$
(137) a'_8	$1 \quad l_6$	$1,00\ 00\ 00 \ldots \ l_6$
(138) b'_8	$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad l_6$	$0,70\ 71\ 07 \ldots \ l_6$
(139) c'_8	$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad l_6$	$0,57\ 73\ 50 \ldots \ l_6$
(140) d'_8	$\frac{\sqrt{6}}{3} \quad l_6$	$0,81\ 64\ 97 \ldots \ l_6$
(141) $2\varphi_8$	$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\operatorname{sen} \varphi = 0,81\ 64\ 97 \ldots$ $2\varphi = 109°\ 28'\ 16,6''$
(142) k'_8	$\frac{\sqrt{6}}{6} \quad l_6$	$0,40\ 82\ 48 \ldots \ l_6$
(143) S'_8	$4\sqrt{3} \quad l_6^2$	$6,92\ 82\ 03 \ldots \ l_6$
(144) V'_8	$\frac{4}{3} \quad l_6^3$	$1,33\ 33\ 33 \ldots \ l_6$
Relaciones entre magnitudes		
$l_6 : l'_8$	(145) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0,70\ 71\ 07 \ldots$
$S_6 : S'_8$	(146) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$0,86\ 60\ 25 \ldots$
$V_6 : V'_8$	(147) $\frac{3}{4}$	$0,75\ 00\ 00 \ldots$

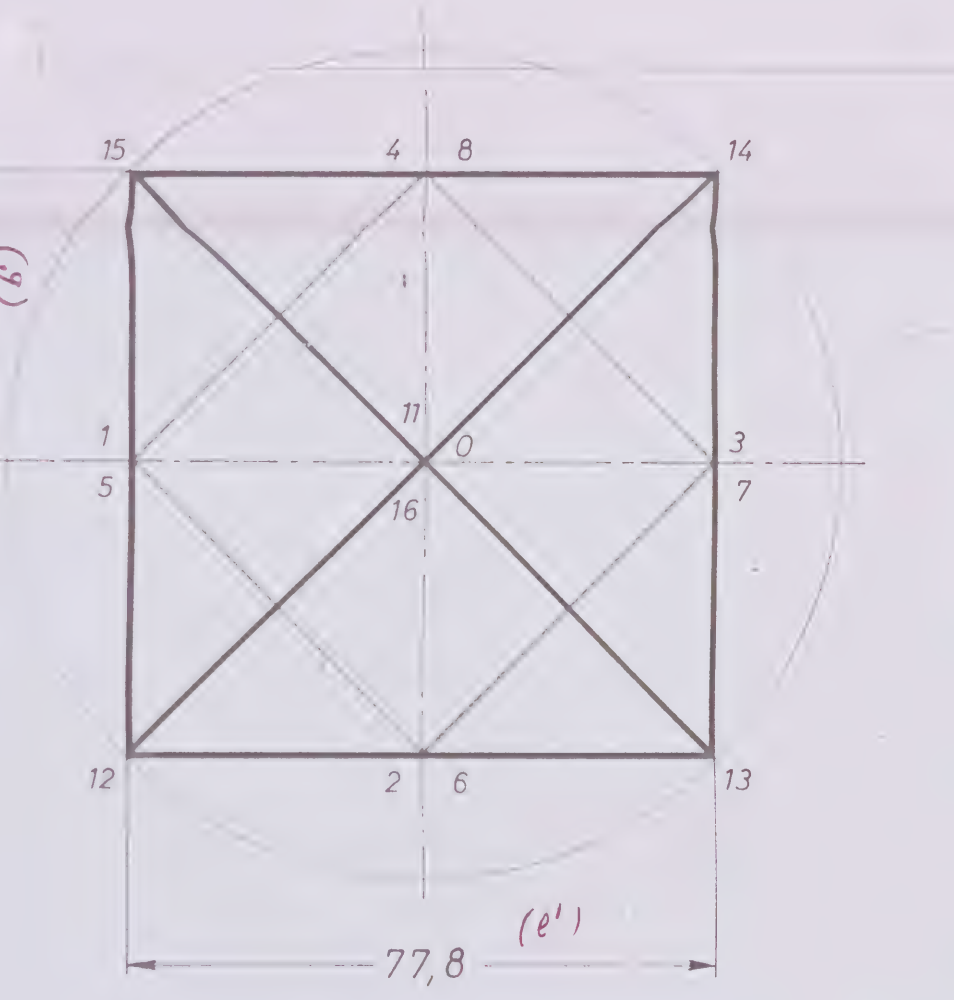
$$\frac{S_6}{S'_8} = \sqrt{\frac{V_6}{V'_8}} \qquad \frac{V_6}{V'_8} = \left(\frac{S_6}{S'_8}\right)^2$$

I

III



II



+X

O

+Y

+Z

+Y

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular de 55,0 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del exaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

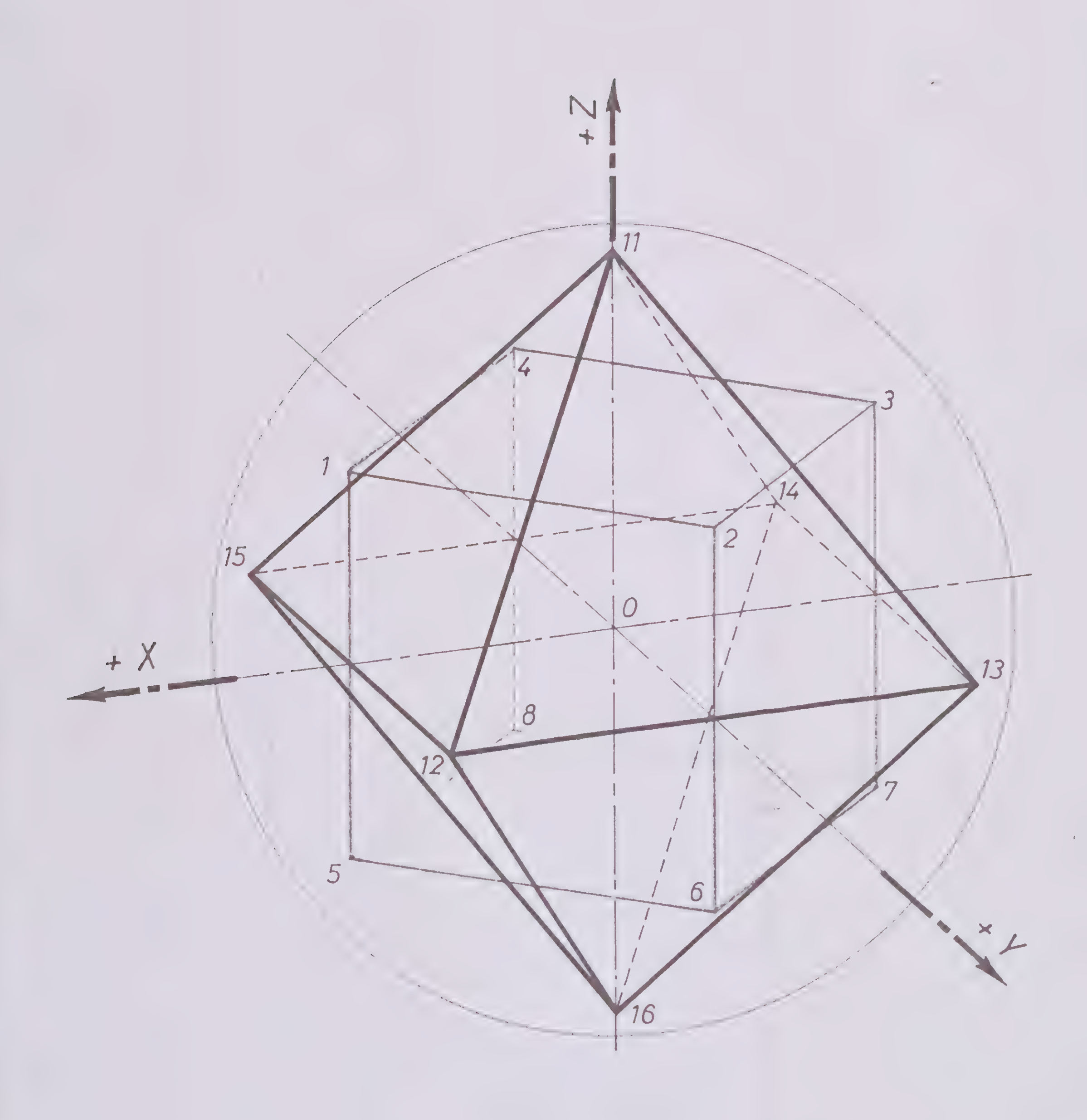
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro dato .... 1 al 8

Octaedro conjugado .... 11 al 16

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 13 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 14

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico analítico, en los planos I, II y III, el exaedro conjugado de un octaedro regular de 77,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del octaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

$l_8 = 77,8$ mm



El poliedro conjugado de un octaedro regular es un exaedro regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del octaedro dado, y ambas se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos los vértices del exaedro conjugado sobre las respectivas caras del octaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cada cara triangular del octaedro.

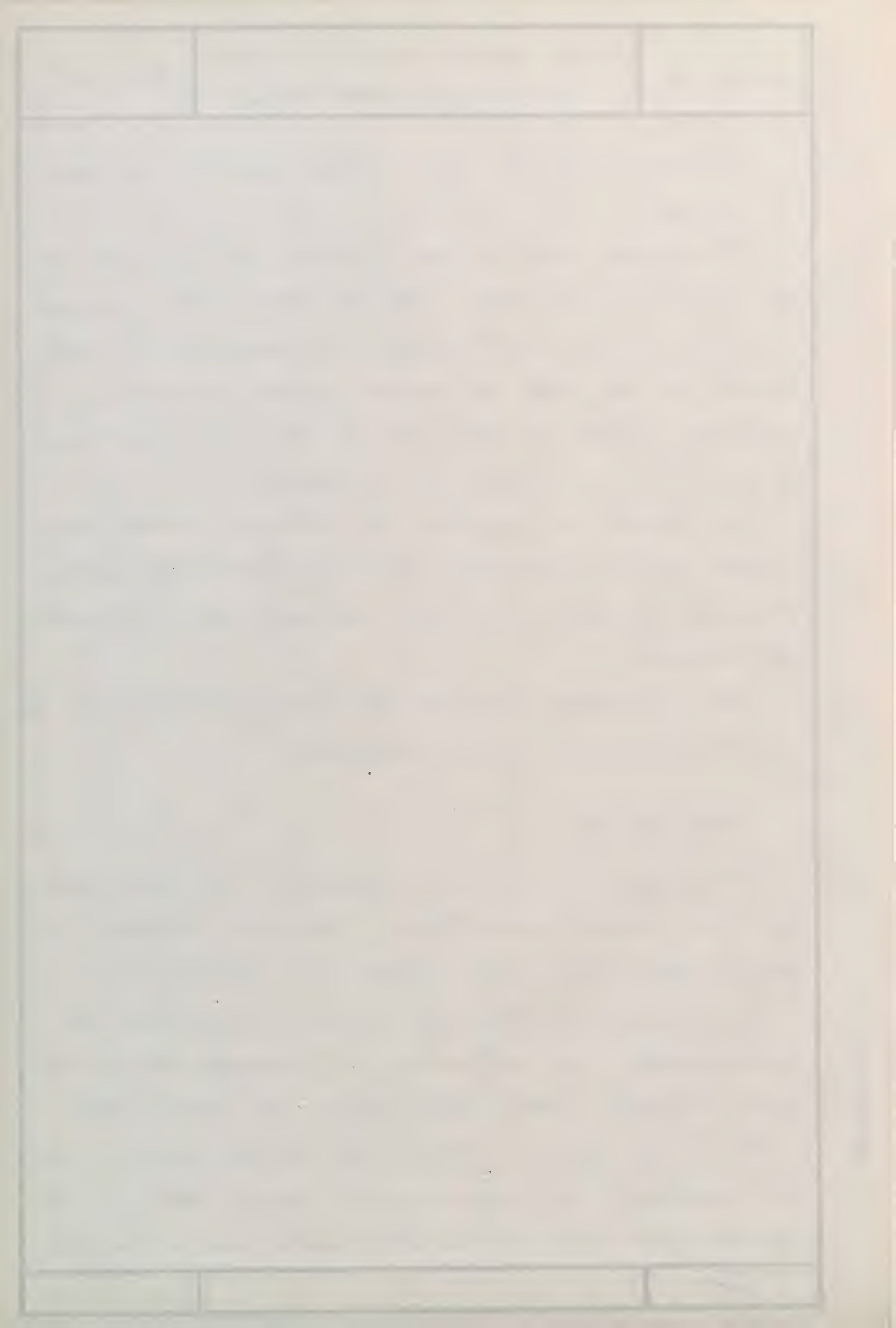
Estas propiedades nos permiten resolver fácilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Procedamos previamente a la representación del octaedro dado, cuyo lado, conocido, es de 77,8 mm. Para ello utilizaremos el trazado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 3.

Seguidamente, completemos en el plano II la proyección del exaedro pedido, cuyo contorno es un cuadrado obtenido al unir los puntos medios del contorno del octaedro dado.

Obtenida la proyección sobre II del exaedro pedido, se deduce fácilmente las proyecciones del mismo sobre I y III (iguales), así como el lado del exaedro que se proyecta



en su verdadera magnitud en II.

Con la numeración adecuada de los vértices y centro de ambos poliedros quedará completada la representación pedida.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lámina 14, se desarrolla basándose en el efectuado en la lámina 2, en función del lado l'_6 del exaedro conjugado.

Previamente se determinará el radio a'_6 de la esfera circunscrita al mismo, teniendo en cuenta la igualdad, en ambos poliedros, del radio de la esfera tangente a las aristas.

El radio b_8 de la esfera tangente a las aristas del octaedro dado, tiene por valor, en función de l_8

$$b_8 = \frac{1}{2}\ l_8 = b'_6 \qquad [1]$$

y por otra parte, el lado l'_6 del exaedro conjugado, en función de b'_6, es

$$l'_6 = \sqrt{2}\ b'_6 = \sqrt{2} \times \frac{1}{2}\ l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l_8 \qquad [2]$$

Conocido l'_6 en función de l_8, se calcularán los siguientes valores (ver tabla figura 2):

$$l'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l_8 = 1,41\ 42\ 13\ 56\ 24 \times \frac{77,8}{2} = 55,0$$

siendo la relación $l'_6 : l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [3]

UNE A4 210 X 297



$$a'_6 = 0.86\,60\,25 \times 55,0 = 47,6$$

$$b'_6 = 0.70\,71\,07 \times \text{''} = 38,9$$

$$c'_6 = 0.50\,00\,00 \times \text{''} = 27,5$$

$$d'_6 = 0.70\,71\,07 \times \text{''} = 38,9$$

$$2\varphi = 90^\circ$$

$$k'_6 = 0.50\,00\,00 \times \text{''} = 27.5$$

Obsérvese que el lado l'_6 del exaedro conjugado, es igual al radio a_8 de la esfera circunscrita al octaedro dado, lo cual se demuestra teniendo en cuenta que (ver [2]):

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}\, l'_6 = l'_6 \qquad [4]$$

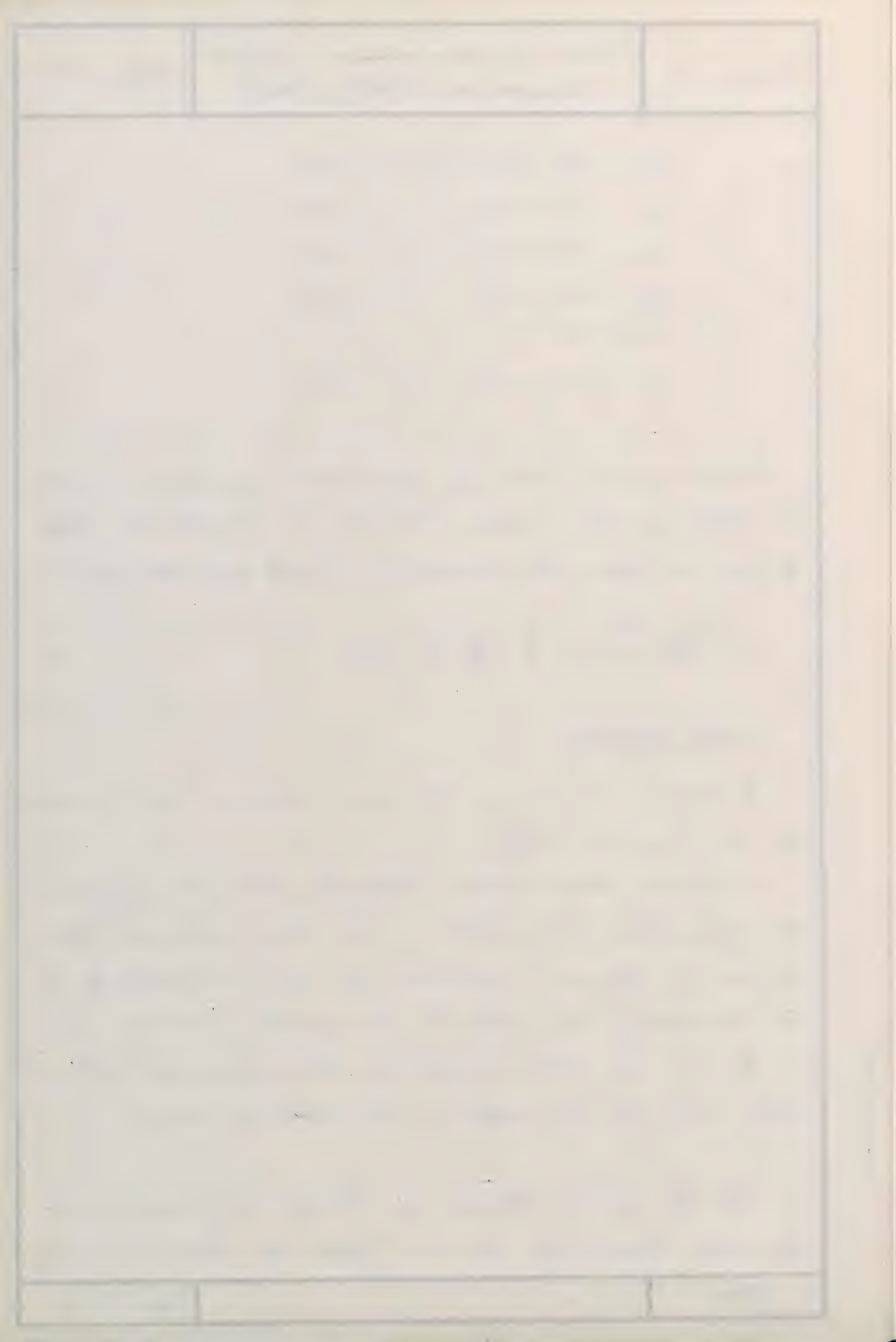
FIGURA CORPÓREA

El exaedro conjugado se obtiene por acoplamiento de 6 cuadrados de 55 mm de lado.

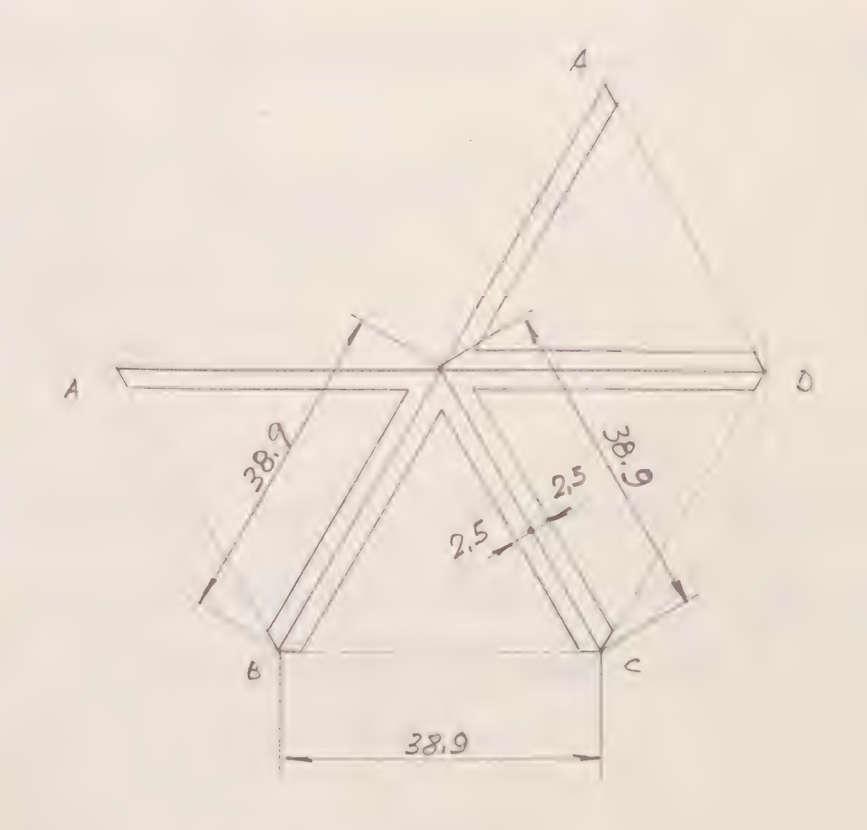
El octaedro dado se obtiene formando previamente 6 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas caras laterales son 4 triángulos equiláteros de 38,9 mm (mitad del lado del octaedro); estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las seis caras del conjugado, de forma que sus vértices estén en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el octaedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 8 pirámides triangulares, por

UNE A4 210 X 297



las obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



Estas ocho pirámides se acoplarán al exaedro conjugado, colocando sus vértices A. B. C. D. en los puntos medios de las aristas.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

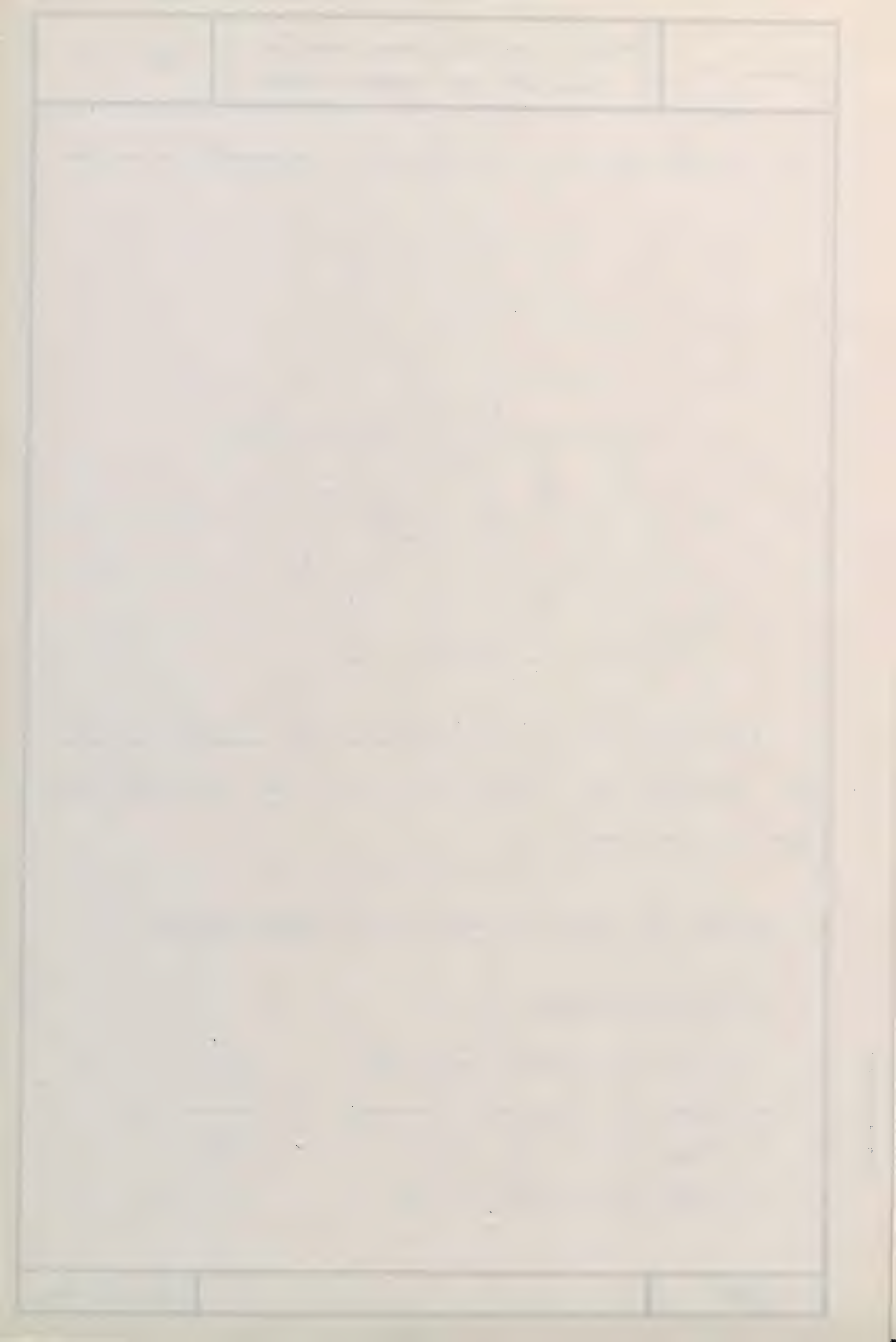
Nomenclatura empleada -

l'_6 = lado del exaedro conjugado.

a'_6 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_6 = Radio de la esfera inscrita.



d'_6 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi'_6$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

k'_6 = Apotema del polígono de una cara

S'_6 = Superficie

V'_6 = Volumen.

Los valores anteriores del exaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_8 del octaedro dado, ya que el valor conocido de l'_6 en función de l_8 (ver fórmula [2]), es

$$l'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$$

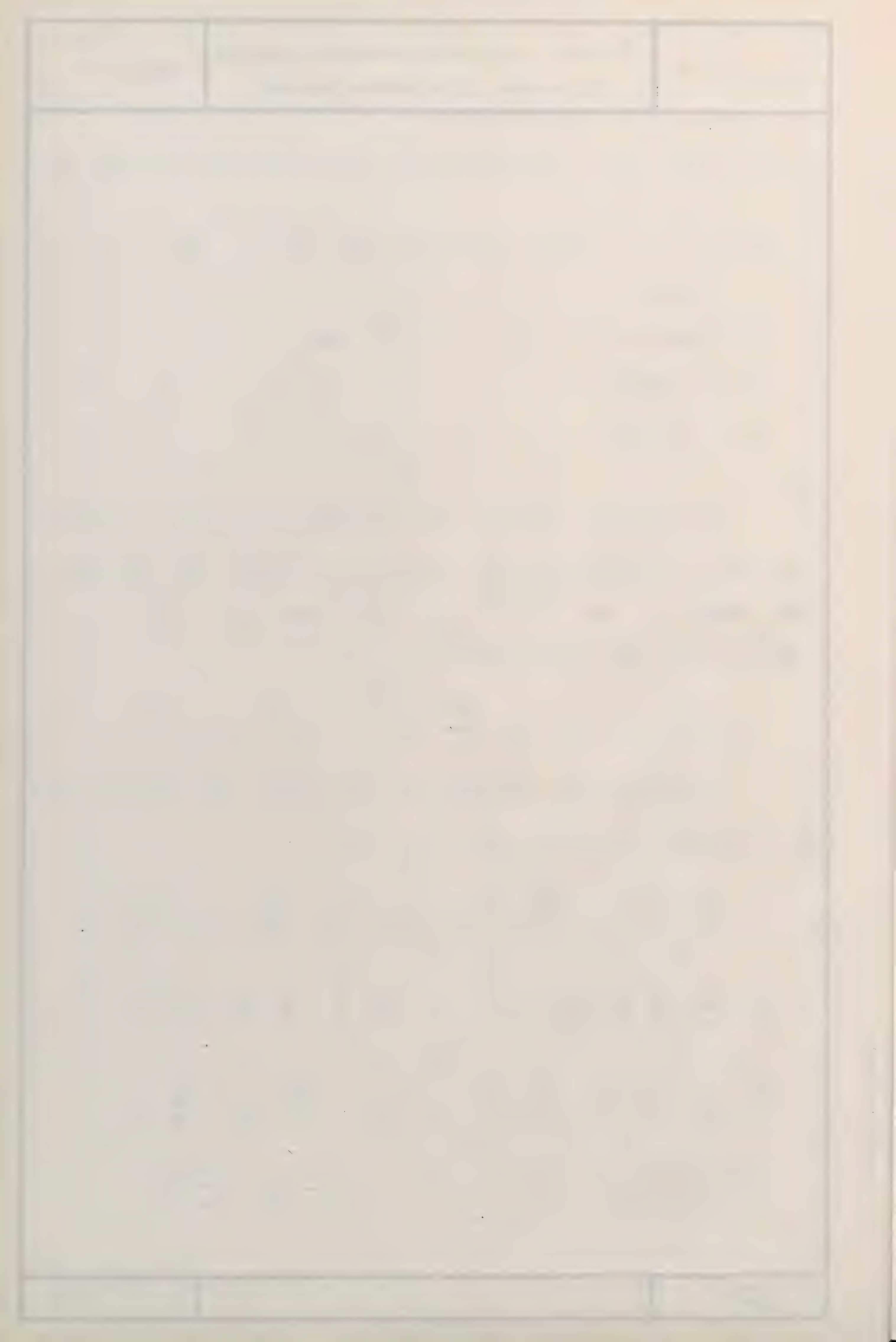
Sustituyendo este valor en las fórmulas 11 a 19 de la lámina 3, tendremos:

$a'_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_8$; $\quad b'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{1}{2}\, l_8$

$c'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_8$; $\quad d'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{1}{2}\, l_8$

$k'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_8$; $\quad h'_6 = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$

$S'_6 = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8\right)^2 = \frac{6 \times 2}{4}\, l_8^2 = 3\, l_8^2 \quad V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_8^3$



Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\dfrac{l_8}{l'_6} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ (ver fórmula [2])

b) $\dfrac{S_8}{S'_6} = \dfrac{2\sqrt{3}\ l_8^2}{3\ l_8^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

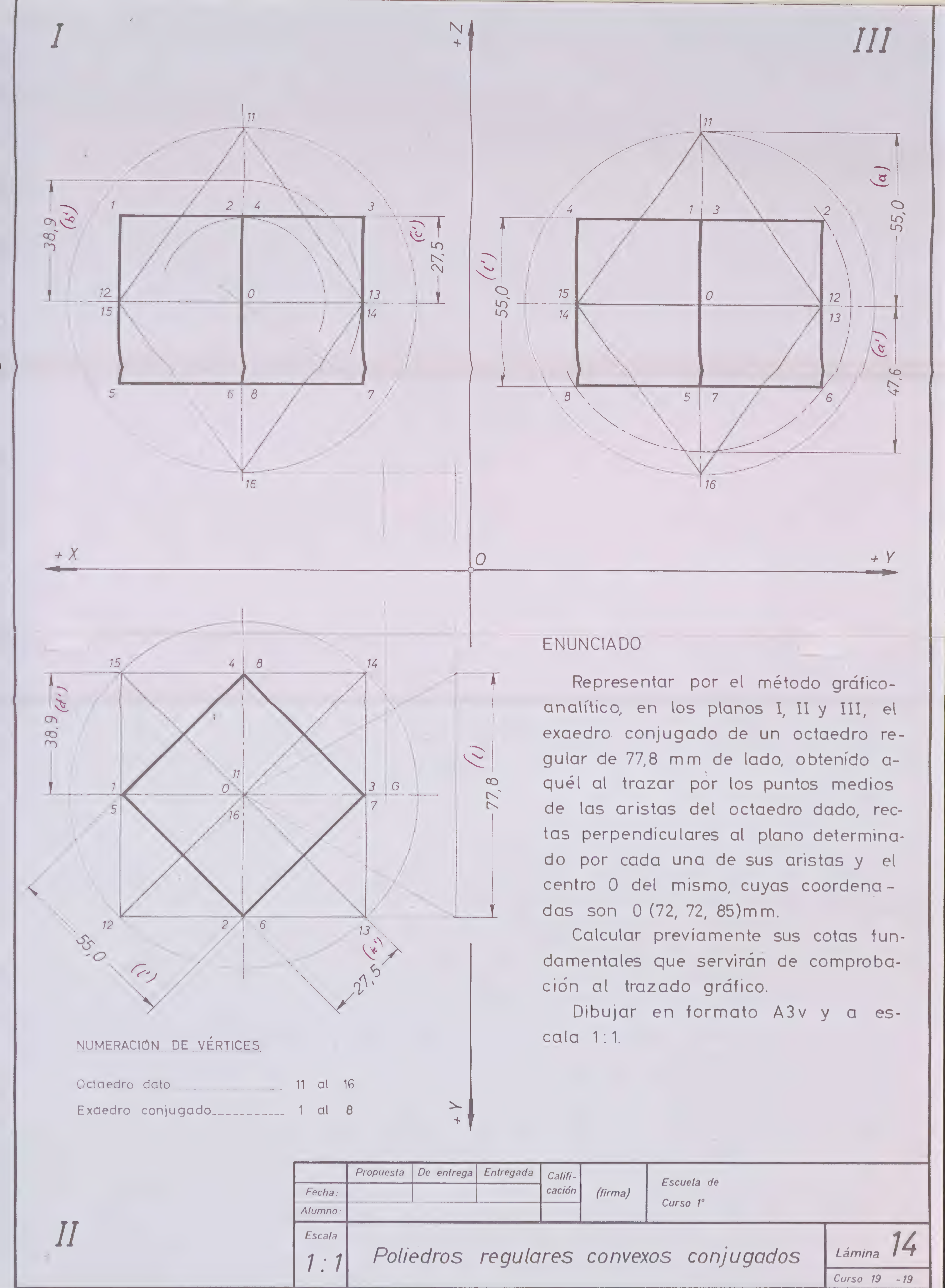
c) $\dfrac{V_8}{V'_6} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}\ l_8^3}{\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8^3} = \dfrac{4}{3}$

Resumen de resultados en

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l'_6	(148) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ l_8$	$0{,}70\ 71\ 07 \dots\ l_8$
a'_6	(149) $\frac{\sqrt{6}}{4}\ l_8$	$0{,}61\ 23\ 72 \dots\ l_8$
b'_6	(150) $\frac{1}{2}\ l_8$	$0{,}50\ 00\ 00 \dots\ l_8$
c'_6	(151) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8$	$0{,}35\ 35\ 53 \dots\ l_8$
d'_6	(152) $\frac{1}{2}\ l_8$	$0.50.\ 00\ 00 \dots\ l_8$
$2\varphi_6$	(153) $\operatorname{sen}\varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen}\varphi_6 = 0{,}70\ 71\ 07 \dots$ $2\varphi_6 = 90^\circ$
k'_6	(154) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8$	$0{,}35\ 35\ 53 \dots\ l_8$
h'_6	(155) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ l_8$	$0{,}70\ 71\ 07 \dots\ l_8$
S'_6	(156) $3\ l_8^2$	$3.00\ 00\ 00 \dots\ l_8$
V'_6	(157) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8^3$	$0{,}35\ 35\ 53 \dots\ l_8$
Relaciones entre magnitudes		
$l_8 : l'_6$	(158) $\sqrt{2}$	$1{,}41\ 42\ 14 \dots$
$S_8 : S'_6$	(159) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$1{,}15\ 47\ 01 \dots$
$V_8 : V'_6$	(160) $\frac{4}{3}$	$1{,}33\ 33\ 33 \dots$





ENUNCIADO

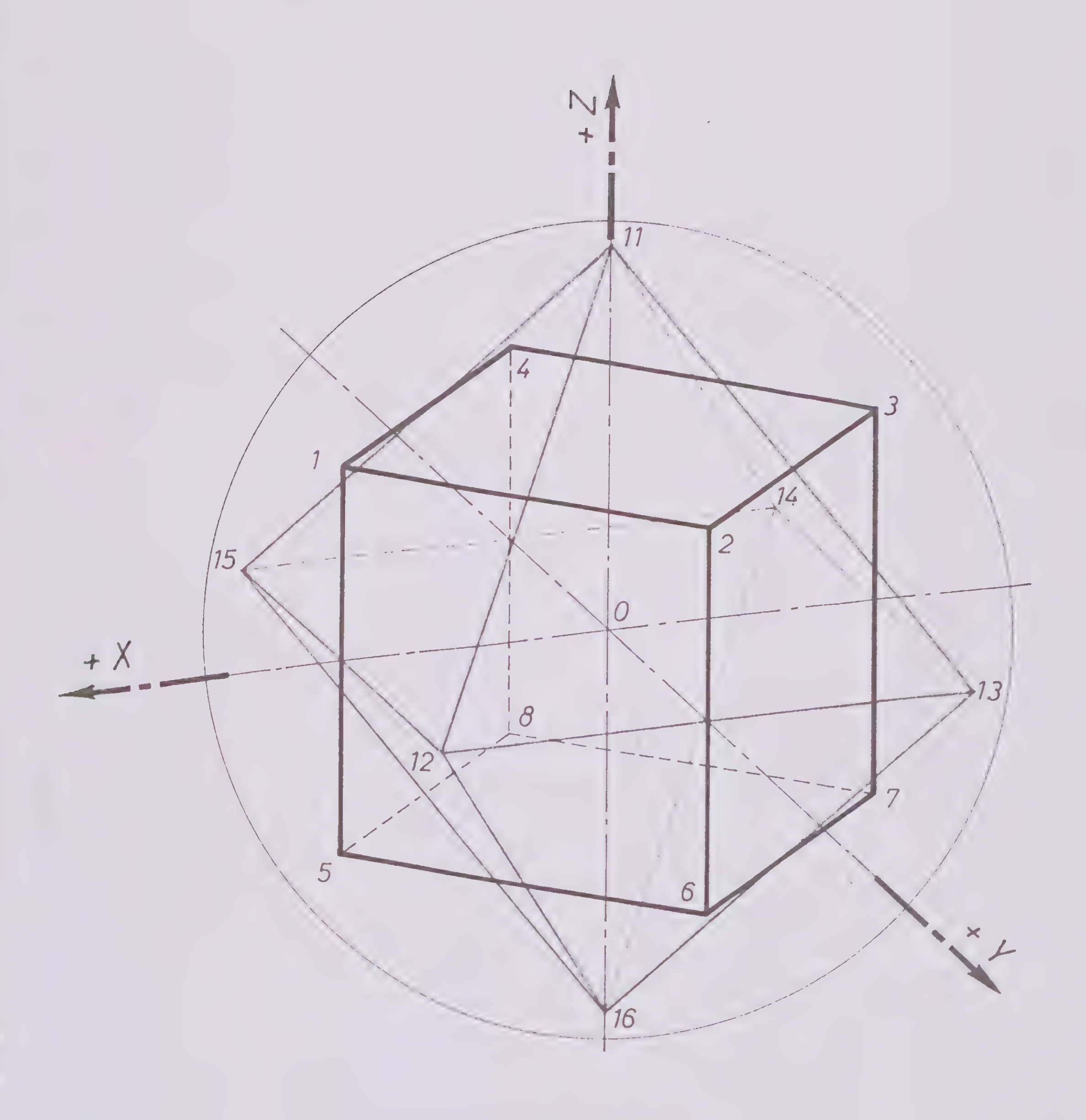
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el exaedro conjugado de un octaedro regular de 77,8 mm de lado, obtenído aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del octaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son 0 (72, 72, 85)mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela de Curso 1°
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 14 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 15	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS B) Centros de aristas	15

Lámina 15

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en las láminas 13 y 14.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_6 = 55,6 mm

l'_8 = 77,8 mm

UNE A4 210 X 297

21 - 3 - 72



El poliedro representado en la lámina 15, intersección de un exaedro regular con un octaedro regular, conjugado del anterior, y con la esfera tangente a las aristas común a ambos, se obtiene completando el trazado de la lámina 13 (o el de la lámina 14), con los triángulos equiláteros y cuadrados que se forman al ser cortado cada ángulo sólido de uno de los poliedros por las caras de su conjugado. Los vértices de estos polígonos estarán en los puntos medios de las aristas de ambos poliedros.

El "Proceso gráfico" y el "Proceso gráfico-analítico" de la mencionada lámina 13 (o el de la 14), sirve igualmente para este ejercicio.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 pirámides rectas (sin base), compuesta cada una de ellas por 3 triángulos rectángulos isósceles de catetos de 27.5 mm e hipotenusa de 38.9 mm correspondientes al exaedro regular, con otras 6 pirámides rectas (sin base), compuesta cada una de ellas por 4 triángulos equiláteros de 38,9 mm de lado, correspondientes estas últimas al octaedro regular.

Este poliedro es cóncavo, ya que la prolongación del plano de cualquier cara de uno de los poliedros, deja en distintos semiespacios a los vértices del otro.



CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

El núcleo de este poliedro es el sólido común en la intersección de un exaedro regular con su octaedro regular conjugado con respecto a los puntos medios de sus aristas.

Este sólido común es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros, de lados de igual longitud en ambos polígonos. Sus ángulos poliedros (12 en total) son todos iguales y en cada uno de ellos concurren dos caras cuadradas y dos triangulares en forma alternada.

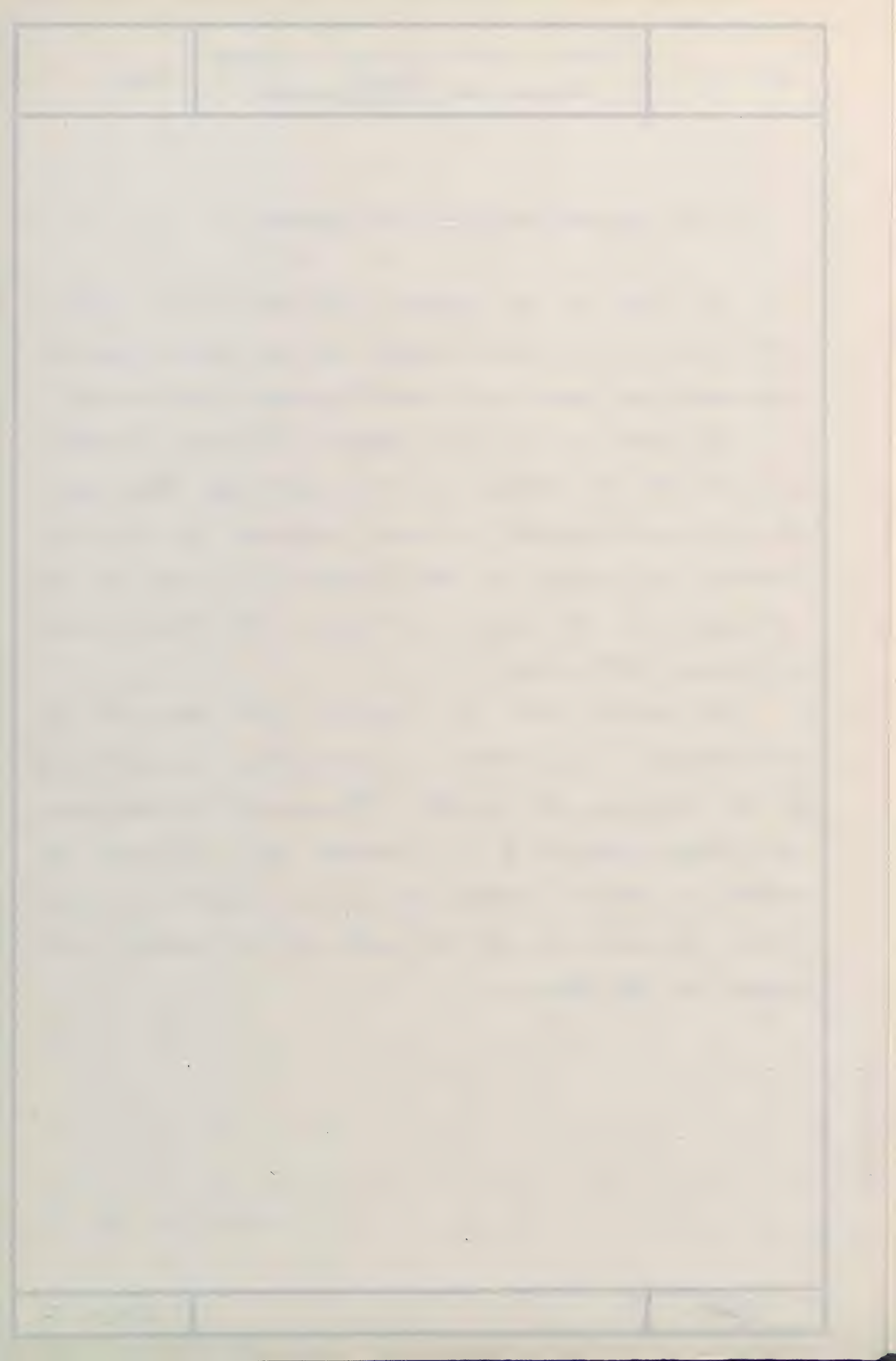
Este poliedro entra en el grupo de los llamados "Arquimedianos", cuyo estudio y representación desarrollamos en las láminas 33 a 48. Corresponde al designado por "Arquimediano III" (lámina 35), donde se detalla el cálculo analítico de sus principales magnitudes, algunas de ellas de aplicación al poliedro estudiado en esta lámina.

(continúa en hoja 3)



21 - 3 - 72

UNE A4 210 X 297



CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

α = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras secantes contiguas

El diedro α, formado por una cara del exaedro, con la cara secante del octaedro conjugado, es suplementario del semidiedro 2ψ del octaedro regular; su valor será pues

$$\alpha = 180^\circ - \frac{109^\circ\ 28'\ 26.6''}{2} = 125^\circ\ 15'\ 51,7'' \qquad [1]$$

S = Área lateral en función de l_8

La superficie lateral está compuesta: 1)-De 6 pirámides P_4, cuyas caras laterales son 4 triángulos equiláteros de lado igual a $\frac{l_8}{2}$, y: 2)-De 8 pirámides P_3, cuyas caras laterales son 3 triángulos isósceles, rectángulos, de hipotenusa igual a $\frac{l_8}{2}$. Por consiguiente, la superficie S del poliedro, será:

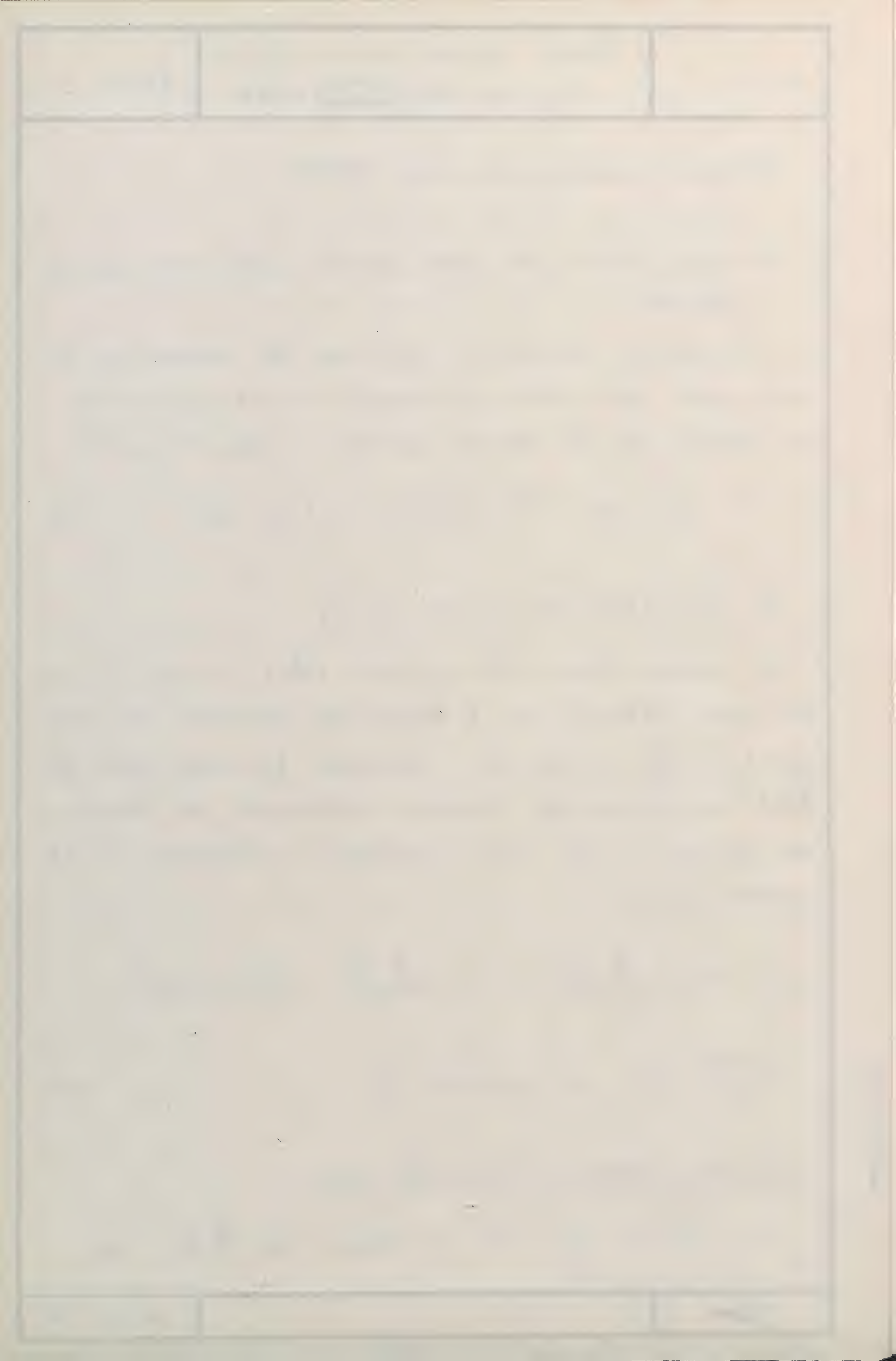
$$S = 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_8}{2}\right)^2 + 8 \times 3 \times \frac{\frac{l_8}{2} \times \frac{l_8}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, l_8^{\,2} + \frac{3}{2}\, l_8^{\,2} =$$

$$= \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}\, l_8^{\,2} = 4,09\overline{\ }80\ 76 \ldots\ l_8^{\,2} \qquad [2]$$

S = Área lateral en función de l_6

De la relación $\frac{l_8}{l_6} = \sqrt{2}$ * se deduce $l_8 = \sqrt{2}\, l_6$, que

* Lám. 14, fórmula 158



sustituido en [2], nos da:

$$S = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\left(l_8^2\right) = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}\, l_6\right)^2 = \left(3+3\sqrt{3}\right) l_6^2 = \qquad [3]$$

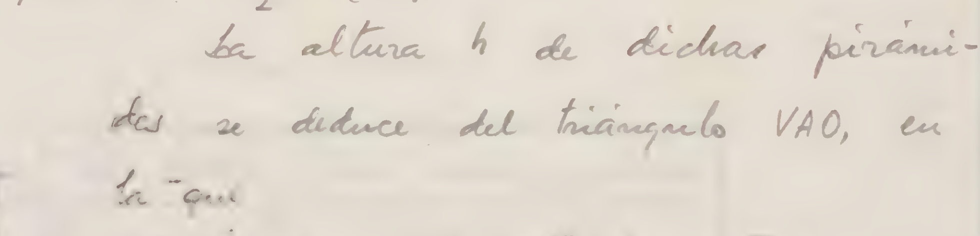
$$= 8,19\,61\,52\ldots\ l_6^2$$

V = Volumen en función de l_8

El volumen se puede calcular como suma de volúmenes de uno de los poliedros regulares y de las pirámides complementarias formadas en sus caras por la intersección del otro.

Considerando como primer sumando el volumen del octaedro, habrá de incrementarse a éste el volumen de 8 pirámides de base triangular (equilátera) y caras laterales formadas por triángulos rectángulos isósceles de hipotenusa igual a $\frac{l_8}{2}$ (fig. 1).

La altura h de dichas pirámides se deduce del triángulo VAO, en la que



$$\overline{VA} = \frac{1}{4} l_8 \quad y \quad \overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{l_8}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} l_8$$

$$y \quad \overline{VO} = \sqrt{\overline{VA}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{\frac{1}{16} l_8^2 - \frac{3}{12^2} l_8^2} = \sqrt{\frac{12^2 - 16\times 3}{12^2 \times 16}}\ l_8 = \frac{\sqrt{6}}{12}\ l_8$$

de donde



$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} l_8^3 + 8 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{l_8}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12 \times 3} l_8\right] = \frac{3\sqrt{2}}{8} l_8^3 = \qquad [4]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} l_8^3 + 8 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{l_8}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12 \times 3} l_8\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{3}\sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3}\right) l_8^3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2^3\sqrt{18}}{2^4 \times 2^2 \times 3^2}\right) l_8^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2^3 \times 3\sqrt{2}}{2^6 \times 3^2}\right) l_8^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{24}\right) l_8^3 =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} + \sqrt{2}}{24} l_8^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8} l_8^3$$

V = Volumen en función de l_6 -

Siendo $l_8 = \sqrt{2}\, l_6$ (ver apartado c)), sustituyendo este valor en [4], tendremos

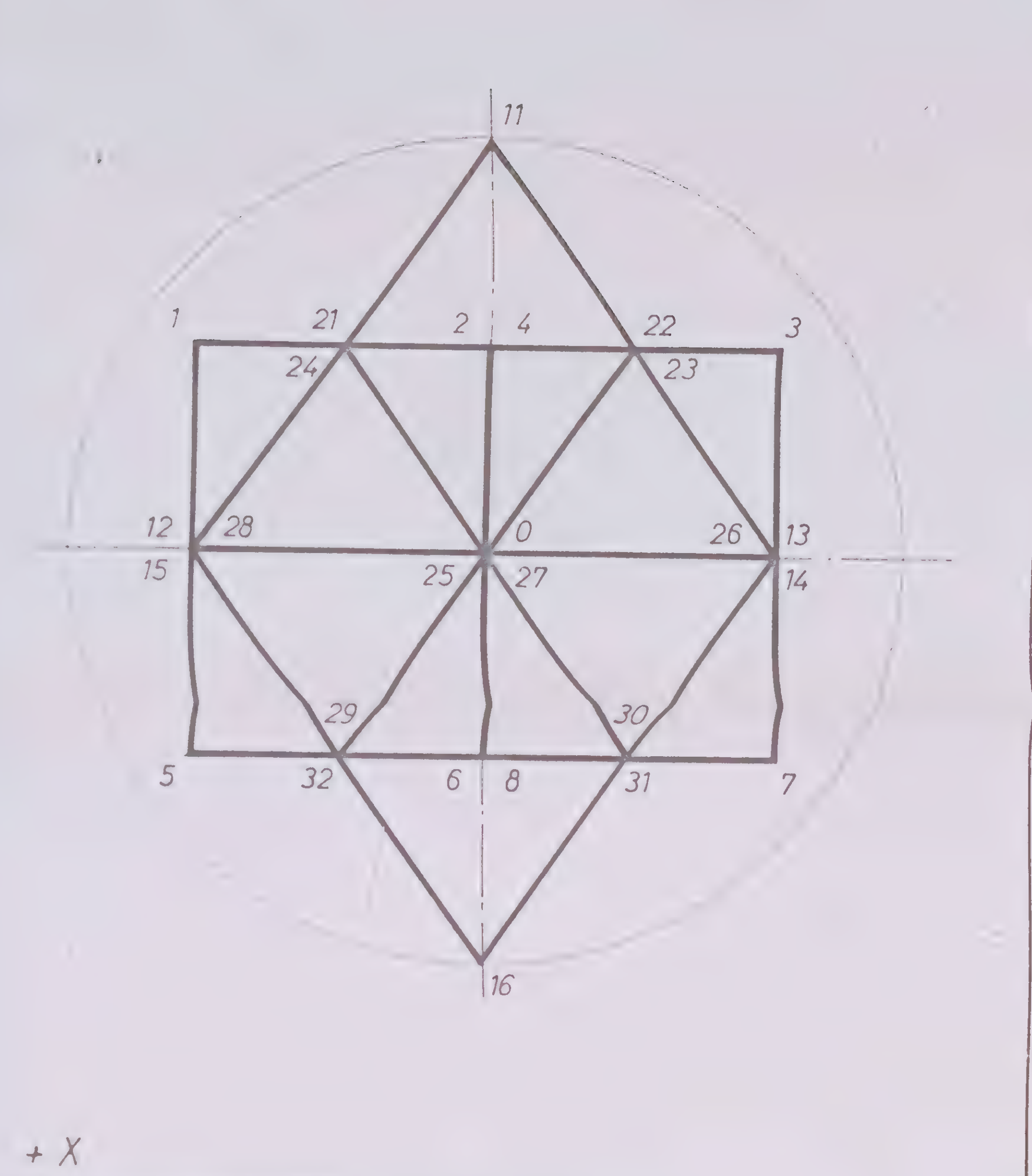
$$V = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times \left(\sqrt{2}\, l_6\right)^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times 2\sqrt{2}\, l_6^3 = \frac{12}{8} l_6^3 = \frac{3}{2} l_6^3$$

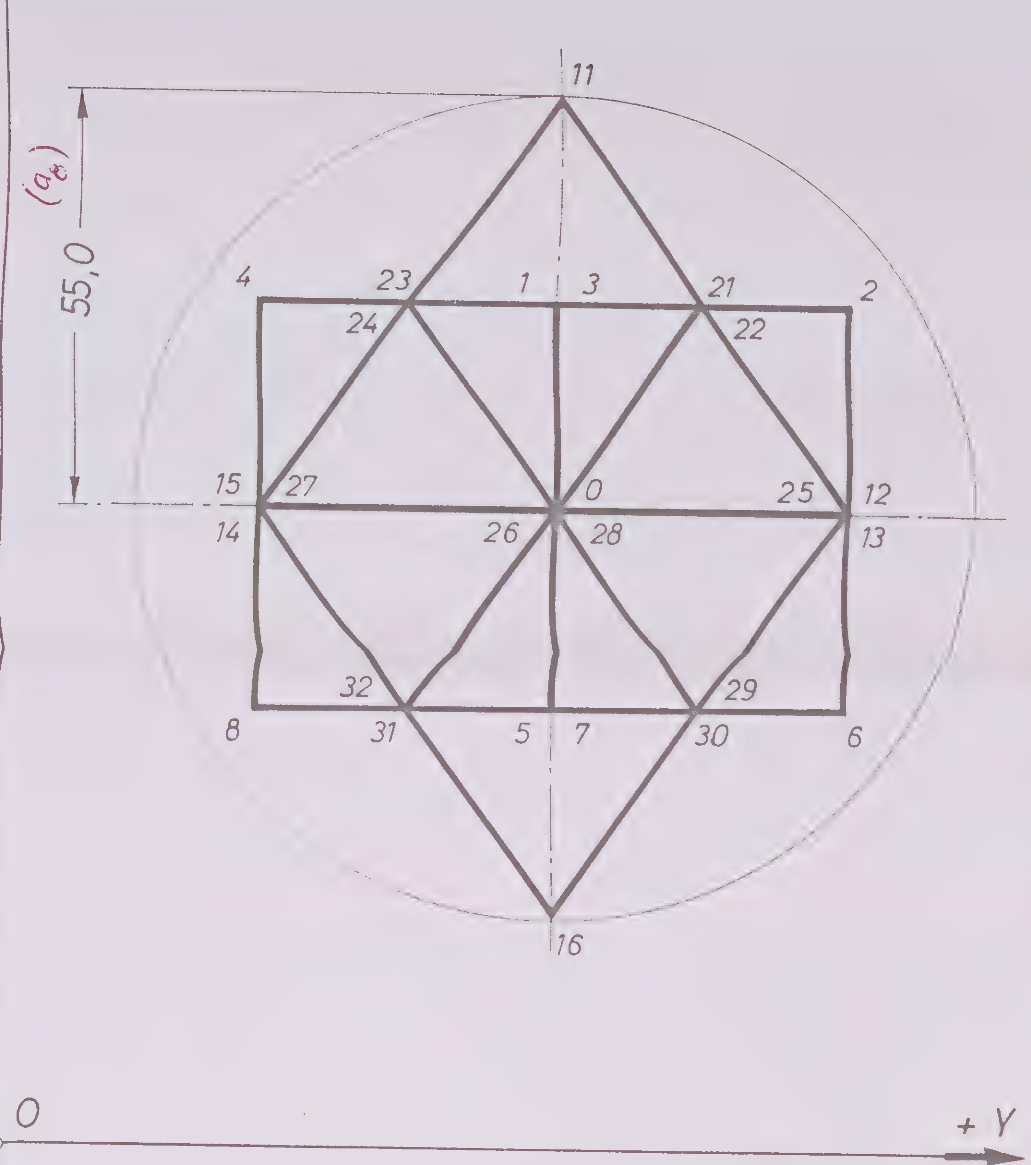
Resumen de resultados:

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(161) α	$\frac{\pi}{2} - 2\,\text{arc. sen.}\,\frac{\sqrt{6}}{3}$	125° 15' 51,7"
(162) S	$\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}\, l_8^2$	4, 09 80 76 ... l_8^2
	$3 + 3\sqrt{3}\, l_6^2$	8, 19 61 52 .. l_6^2
(163) V	$\frac{3\sqrt{2}}{8}\, l_8^3$	0, 53 03 31... l_8^3
	$\frac{3}{2}\, l_6^3$	1, 50 00 00 --- l_6^3







+ Z

+ X

O

+ Y

II

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en las láminas 13 y 14.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro .... 1 al 8

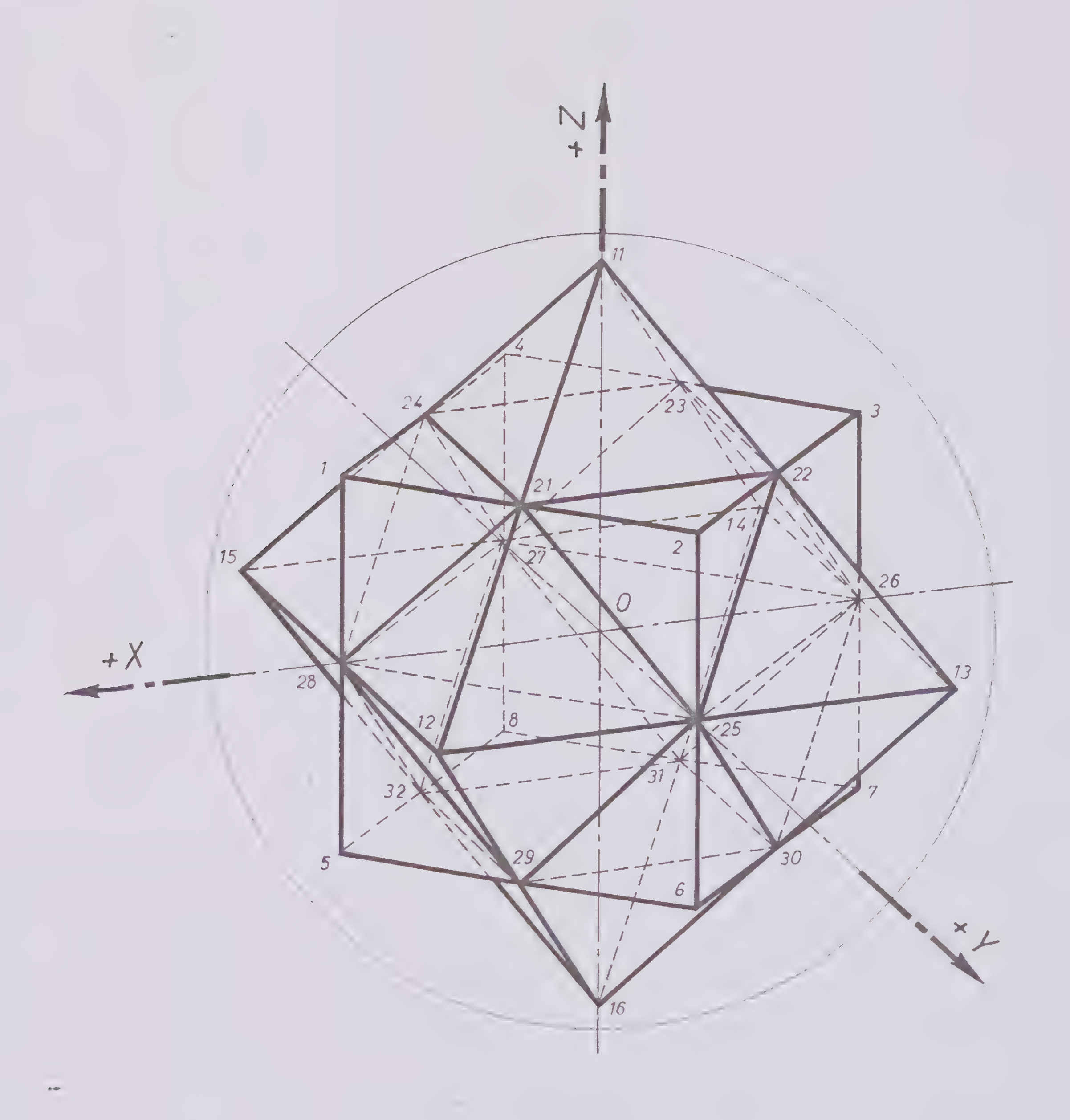
Octaedro .... 11 al 16

Núcleo (arquimediano III) .... 21 al 32

+ Y

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

Escala 1 : 1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 15 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 16	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS. B) Centros de aristas	16

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el icosaedro conjugado de un dodecaedro regular de 35,7 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del dodecaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

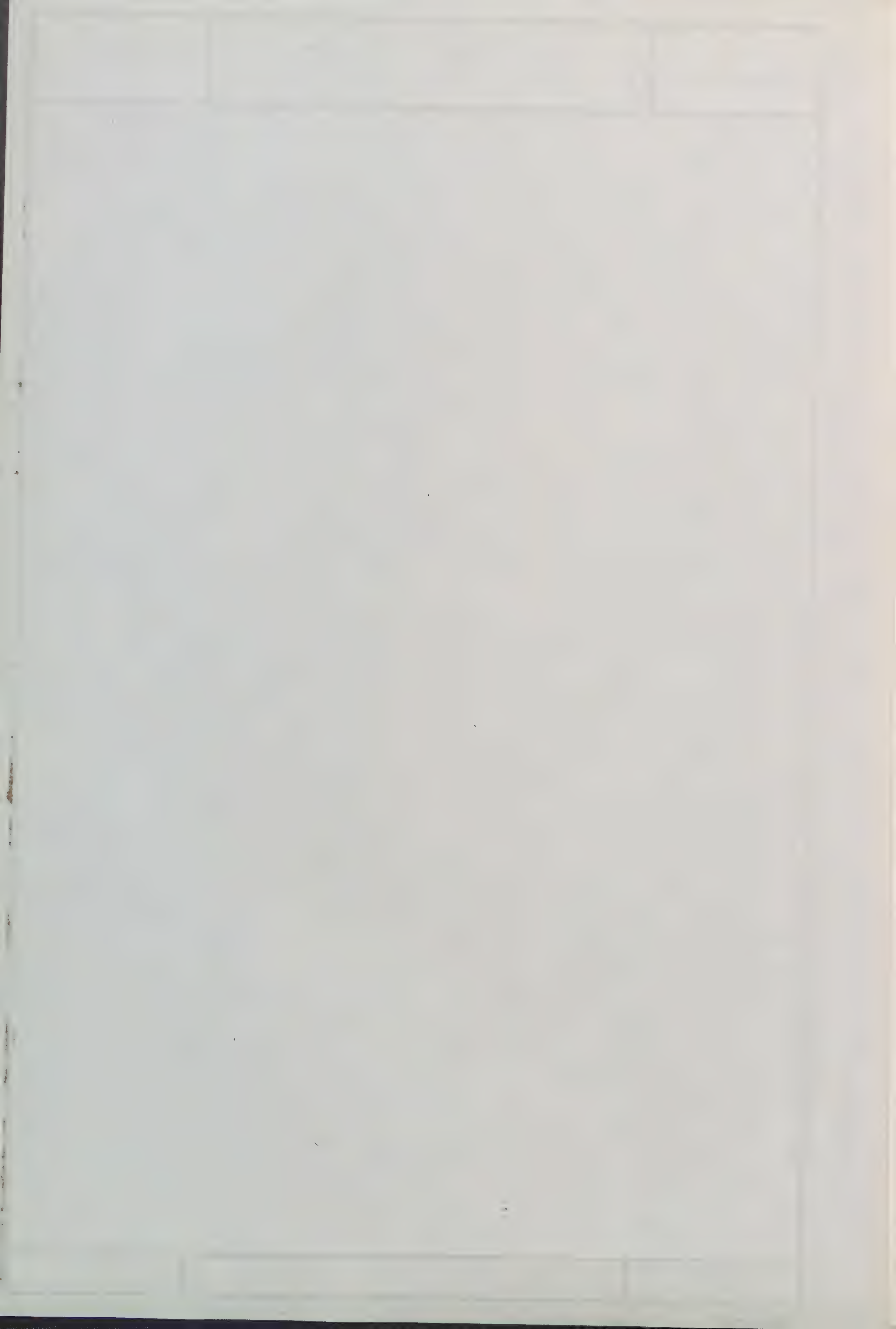
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_{12} = 35,7 mm

UNE A4 210 X 297

		24 - 3 - 93



El poliedro conjugado de un dodecaedro regular, es un icosaedro regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del dodecaedro, y ambas se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos ortogonalmente los vértices del icosaedro conjugado sobre las respectivas caras del dodecaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cada cara pentagonal del dodecaedro.

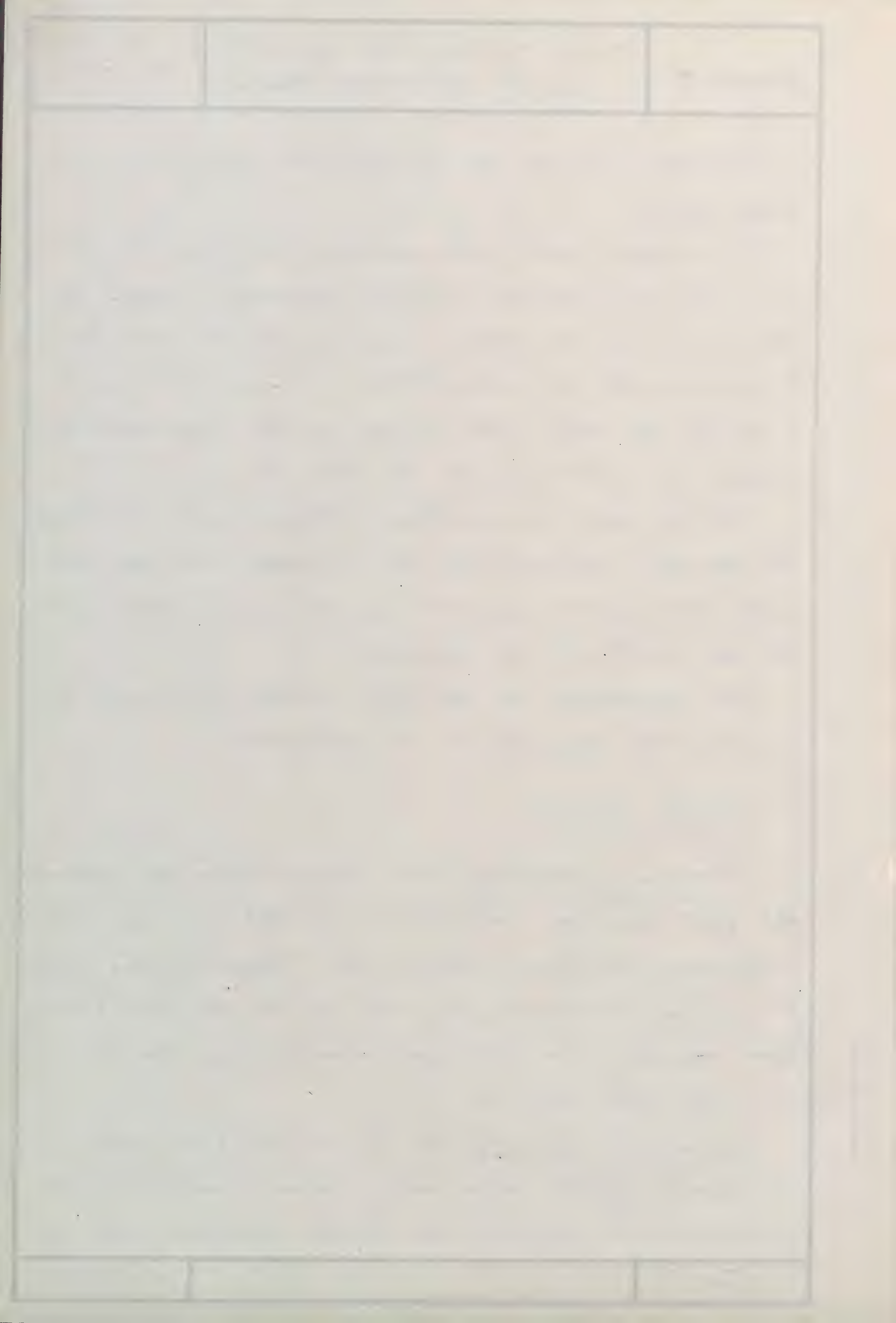
Estas propiedades nos permiten resolver fácilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Procedamos previamente a la representación del dodecaedro dado, en los planos I, II y III, cuyo lado, conocido, es de 35.7 m.m. Para ello utilizaremos el trazado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 4, determinando previamente el valor del radio c de la esfera inscrita (ver Proceso gráfico-analítico) cuyo valor será:

$c = 1,1135 \times 35.7 = 39.8$ mm

Seguidamente, completaremos en el plano II la proyección del icosaedro pedido, cuyo contorno, según demostraremos seguidamente, es coincidente con el del dodecaedro dado, por



lo cual la proyección sobre II de dicho icosaedro, es inmediata. Obsérvese que al terminar de dibujar la proyección II, todas las aristas del dodecaedro dado, cortan a las del conjugado en sus puntos medios, ya que esta propiedad en el espacio, se conserva en sus proyecciones.

Dicha propiedad servirá pues de base para obtener la proyección del icosaedro pedido en el plano I.

La proyección del mismo sobre III, se deduce de la I y II.

Con la numeración adecuada de los vértices y centro de ambos poliedros quedará completada la representación pedida.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lámina 16 se desarrolla basándose en el efectuado en la lámina 5, en función del lado l'_{20} del icosaedro conjugado.

Previamente se determinará el radio a'_{20} de la esfera circunscrita al mismo, teniendo en cuenta la igualdad en ambos poliedros, del radio de la esfera tangente a las aristas.

El radio b_{12} de la esfera tangente a las aristas del dodecaedro dado, tiene por valor, en función de l_{12}

$$b_{12} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} l_{12} = b'_{20} \qquad [1]$$

y por otra parte, el lado l'_{20} del icosaedro conjugado, en función de b'_{20}, es



$$l'_{20} = \frac{4}{1+\sqrt{5}}\, b'_{20} = \frac{4}{1+\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} \qquad [2]$$

conocido l'_{20} en función de l_{12}, se calcularán los siguientes valores (ver tabla figura 5):

$$l'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = 1.61\ 80\ 34 \times 35.74\ 11\ 47 = 57.83\ 03\ 93 \; ^{*}$$

siendo la relación $\frac{l'_{20}}{l_{12}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61\ 80\ 34$ [3]

$\rho \quad a'_{20} = 0{,}95\ 10\ 57 \times 57{,}83\ 03\ 93 = 55{,}0$ mm

$b'_{20} = 0{,}80\ 90\ 17 \times$ id $= 46{,}8$ "

$c'_{20} = 0{,}75\ 57\ 61 \times$ id $= 43{,}7$ "

$d'_{20} = 0{,}57\ 73\ 50 \times$ id $= 33{,}4$ "

$f'_{20} = e'_{20} = 0{,}85\ 06\ 51 \times$ id $= 49{,}2$ "

$2\psi = 138^\circ\ 11'\ 23''$

$i'_{20} = g'_{20} = 0{,}52\ 57\ 31 \times$ id $= 30{,}4$ "

$h'_{20} = 0{,}68\ 81\ 91 \times$ id $= 39{,}8$ "

$k'_{20} = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id $= 16{,}7$ "

---

* El valor más aproximado del lado l_{12} dado, se obtiene del exacto $a_{20} = 55$ mm; de donde $l_{20} = 55 : 0{,}95\ 10\ 57 = 57{,}83\ 03\ 93$ y de aquí: $b_{20} = 57{,}83\ 03\ 93 \times 0{,}80\ 90\ 17 = 46{,}78\ 57\ 69$, por lo que será $l_{12} = 46.78\ 57\ 69 : 1{,}30\ 90\ 17 = 35{,}74\ 11\ 47$

UNE A4 210 X 297



Obsérvese que siendo

$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l'_{20} \qquad \text{y} \qquad e_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{12}$$

y según [3] $\dfrac{l'_{20}}{l_{12}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, se verificará que

$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{12}$$

de donde $$e'_{20} = e_{12}$$

El desarrollo del cálculo anterior es el siguiente:

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10} \times \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{20}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{20}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{12}$$

lo cual nos demuestra que: "El radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno en II del icosaedro conjugado, es igual al del dodecaedro dado en la misma proyección".

De aquí se deduce que los lados de ambos decágonos son también iguales, por lo que será:

$$i'_{20} = i_{12}$$

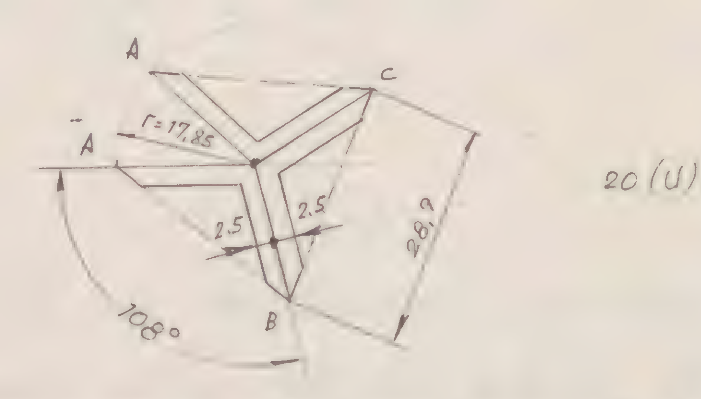


FIGURA CORPÓREA

El icosaedro conjugado se obtiene por el acoplamiento de 20 triángulos equiláteros de 57,8 mm de lado.

El dodecaedro dado se obtiene formando previamente 20 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas caras laterales son 3 triángulos isósceles con base de 28,9 mm (mitad del lado del icosaedro y el ángulo opuesto a dicha base es el inscrito del pentágono regular (108°); los lados iguales de este triángulo serán de 17.85 (mitad del lado del dodecaedro dado). Estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las veinte caras del conjugado, de forma que sus vértices estén en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el dodecaedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 20 pirámides triangulares, por las obtenidas según el trazado que se representa a continuación.



Estas 20 pirámides se acoplarán al icosaedro conjugado, colocando sus vértices A, B, C, en los puntos medios de las aristas.

UNE A4 210 X 297



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada:

l'_{20} = Lado del icosaedro conjugado.

a'_{20} = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_{20} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_{20} = Radio de la esfera inscrita.

d'_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara

$2\varphi_{20}$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e'_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado l'_{20}, y también al decágono regular de lado i'_{20}, contorno de la vista II.

f'_{20} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g_{20} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

h'_{20} = Apotema de un pentágono regular de lado l'_{20}.

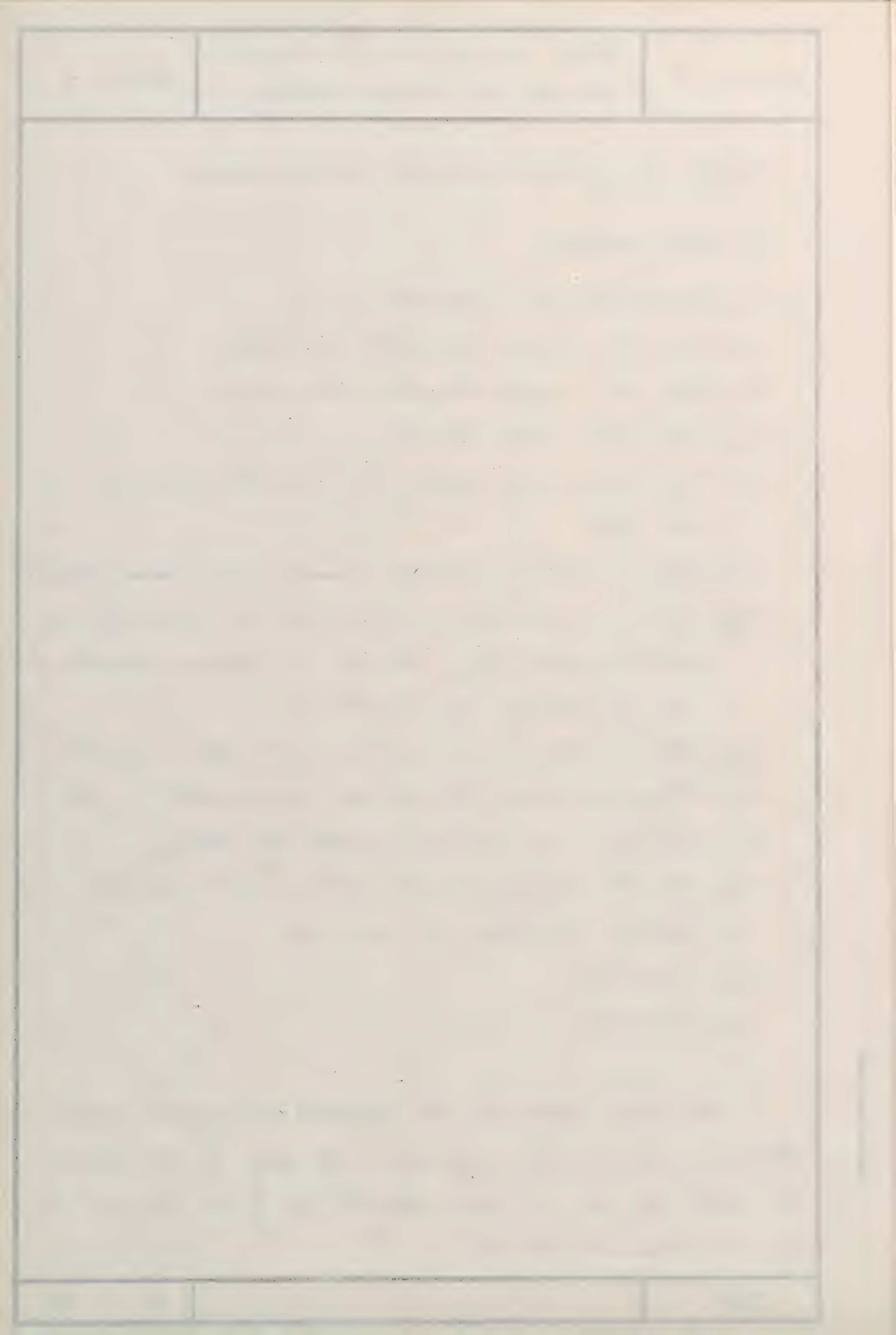
i'_{20} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k'_{20} = Apotema del polígono de una cara.

S'_{20} = Superficie.

V'_{20} = Volumen.

Los valores anteriores del icosaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_{12} del dodecaedro dado, ya que el valor conocido de l'_{20} en función de l_{12} (ver fórmula [2]), es



$$l'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12}$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 43 a 55 de la lámina 5, tendremos:

$$a'_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $a'_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} =$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}}{8}\, l_{12} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}}{8}\, l_{12} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{8}\, l_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(10+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}{8}\, l_{12} = \frac{\sqrt{2\times(30+6\sqrt{5}+10\sqrt{5}+10)}}{8}\, l_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\times(40+16\sqrt{5})}}{8}\, l_{12} = \frac{\sqrt{2\times 8\times(5+2\sqrt{5})}}{8}\, l_{12} = \frac{4\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{8}\, l_{12} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{12}}$$

$$b'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{8}\, l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12}$$

$$c'_b = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $c'_b = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} =$

$$= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}+3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{24}\, l_{12} = \frac{8\sqrt{3}+4\sqrt{15}}{24}\, l_{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\, l_{12}}$$

UNE A4 210 X 297



$$d'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\, l_{12}$$

$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{20}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{20}}\, l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{12}}$$

$$f'_{20} = e'_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{12}$$

$$g'_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $g'_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{20}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{20}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}\, l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{12}}$$

$$h'_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $h'_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{80}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{80}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{40}}\, l_{12} =$$



$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 10}{20}}\, l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}}$$

$$i'_{20} = g'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{12}$$

$$k'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{12}$$

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3}\,(6+2\sqrt{5})}{4}\, l_{12}^{\,2} = \frac{5\sqrt{3}\,(3+\sqrt{5})}{2}\, l_{12}^{\,2} =$$

$$= \frac{15\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{2}\, l_{12}^{\,2}$$

$$V'_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12}\right)^3 = \frac{5 \times (11+5\sqrt{5})}{12}\, l_{12}^{\,3}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V'_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12}\right)^3 =$

$$= \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}\, l_{12}^{\,3} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \frac{16+8\sqrt{5}}{8}\, l_{12}^{\,3} =$$

$$= \frac{(15+5\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{12}\, l_{12}^{\,3} = \frac{30+10\sqrt{5}+15\sqrt{5}+25}{12}\, l_{12}^{\,3} = \frac{55+25\sqrt{5}}{12}\, l_{12}^{\,3} =$$

$$= \boxed{\frac{5 \times (11+5\sqrt{5})}{12}\, l_{12}^{\,3}}$$

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\frac{l_{12}}{l'_{20}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (ver fórmula [2])



b) $$\frac{S_{12}}{S'_{20}} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\;\ell_{12}^2}{\frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{2}\;\ell_{12}^2} = \sqrt{\frac{3\times(5-\sqrt{5})}{10}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $$\frac{S_{12}}{S'_{20}} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\;\ell_{12}^2}{\frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{2}\;\ell_{12}^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}} = \frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}\times(15\sqrt{3}-5\sqrt{15})}{675-375} = \frac{6\times5\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\times(3\sqrt{3}-\sqrt{15})}{300} =$$

$$= \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(3\sqrt{3}-\sqrt{15})^2}}{10} = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(27+15-6\sqrt{45})}}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(42-18\sqrt{5})}}{10} = \frac{\sqrt{6\times(25+10\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}}{10} =$$

$$= \frac{\sqrt{6\times(175+70\sqrt{5}-75\sqrt{5}-150)}}{10} = \frac{\sqrt{6\times(25-5\sqrt{5})}}{10} = \frac{\sqrt{6\times5\times(5-\sqrt{5})}}{10} =$$

$$= \sqrt{\frac{30(5-\sqrt{5})}{100}} = \sqrt{\frac{3\times(5-\sqrt{5})}{10}}$$

c) $$\frac{V_{12}}{V'_{12}} = \frac{\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\;\ell_{12}^3}{\frac{5\times(11+5\sqrt{5})}{12}\;\ell_{13}^3} = \frac{3\times(5-\sqrt{5})}{10}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $$\frac{V_{12}}{V'_{12}} = \frac{\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\;\ell_{12}^3}{\frac{5(11+5\sqrt{5})}{12}\;\ell_{12}^3} =$$

$$= \frac{12(7\sqrt{5}+15)}{20(11+5\sqrt{5})} = \frac{3(7\sqrt{5}+15)(5\sqrt{5}-11)}{5\cdot(125-121)} = \frac{3(175+75\sqrt{5}-77\sqrt{5}-165)}{20} =$$

$$= \frac{3\times(10-2\sqrt{5})}{20} = \boxed{\frac{3\times(5-\sqrt{5})}{10}}$$

UNE A4 210 X 297



En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados:

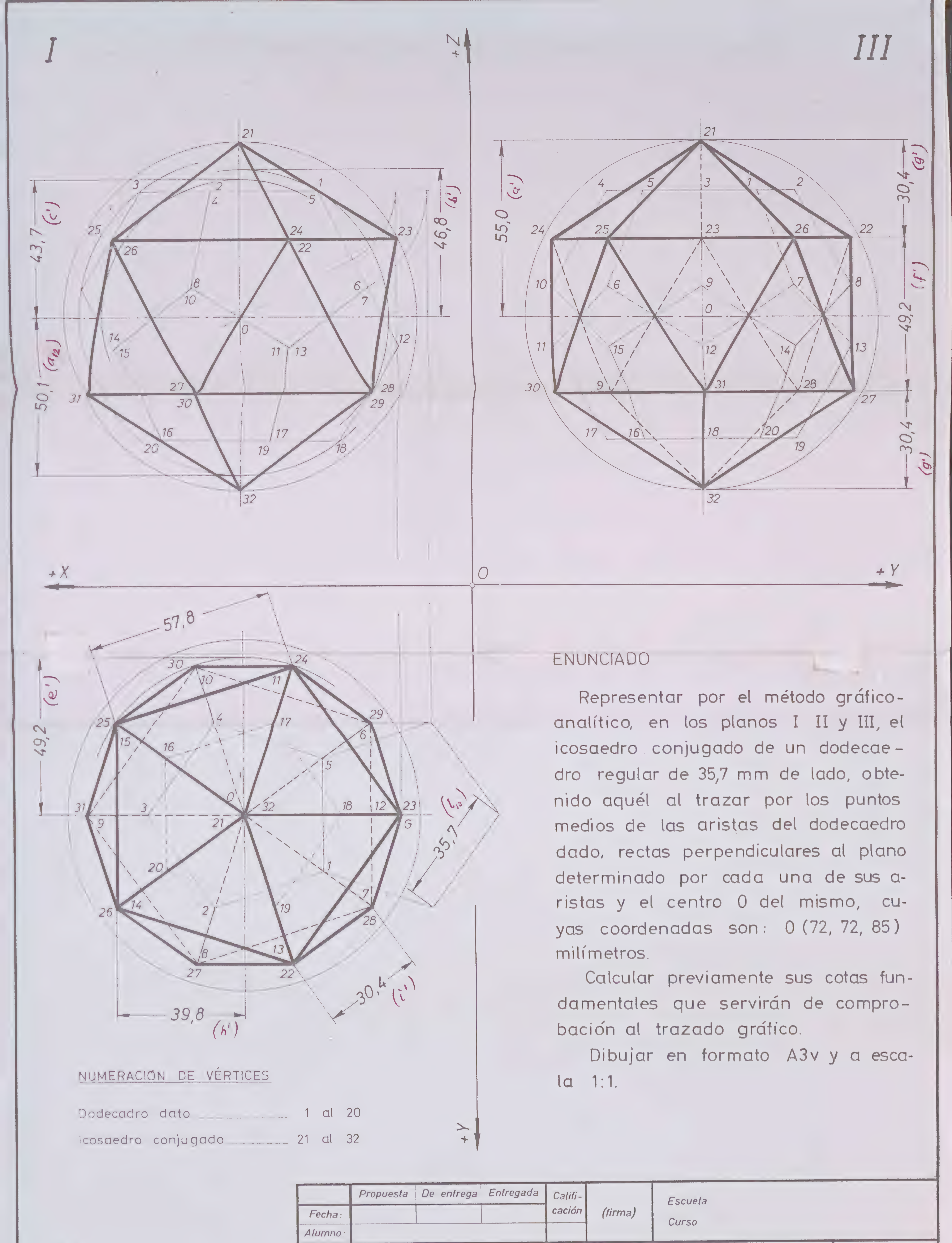
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(164) l'_{20}	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ l_{12}$	1, 61 80 34 ... l_{12}
(165) a'_{20}	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\ l_{12}$	1, 53 88 42 ... l_{12}
(166) b'_{20}	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}\ l_{12}$	1, 30 90 17 ... l_{12}
(167) c'_{20}	$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\ l_{12}$	1, 22 28 47 ... l_{12}
(168) d'_{20}	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\ l_{12}$	0, 93 41 72 ... l_{12}
(169) $2\varphi_{20}$	$\text{sen}\ \varphi_{20} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$	$\text{sen}\ \varphi_{20}$ = 0,93 41 72 ... $2\varphi_{20}$ = 138° 11′ 22,8″
(170) e'_{20}	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{12}$	1, 37 63 82 ... l_{12}
(171) f'_{20}	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{12}$	1, 37 63 82 ... l_{12}
(172) g'_{20}	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{12}$	0, 85 06 51 ... l_{12}
(173) h'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\ l_{12}$	1, 11 35 16 ... l_{12}
(174) i'_{20}	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{12}$	0, 85 06 51 ... l_{12}
(175) k'_{20}	$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\ l_{12}$	0, 46 70 86 ... l_{12}
(176) S'_{20}	$\frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}}{2}\ l_{12}^2$	22, 67 28 39 ... l_{12}^2
(177) V'_{20}	$\frac{5\times(11+5\sqrt{5})}{12}\ l_{12}^3$	9, 24 18 08 l_{12}^3
Relaciones entre magnitudes		
(178) $l_{12} : l'_{20}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0, 61 80 34 ...
(179) $S_{12} : S'_{20}$	$\sqrt{\frac{3\times(5-\sqrt{5})}{10}}$	0, 91 05 93 ...
(180) $V_{12} : V'_{20}$	$\frac{3\times(5-\sqrt{5})}{10}$	0, 72 91 80 ...

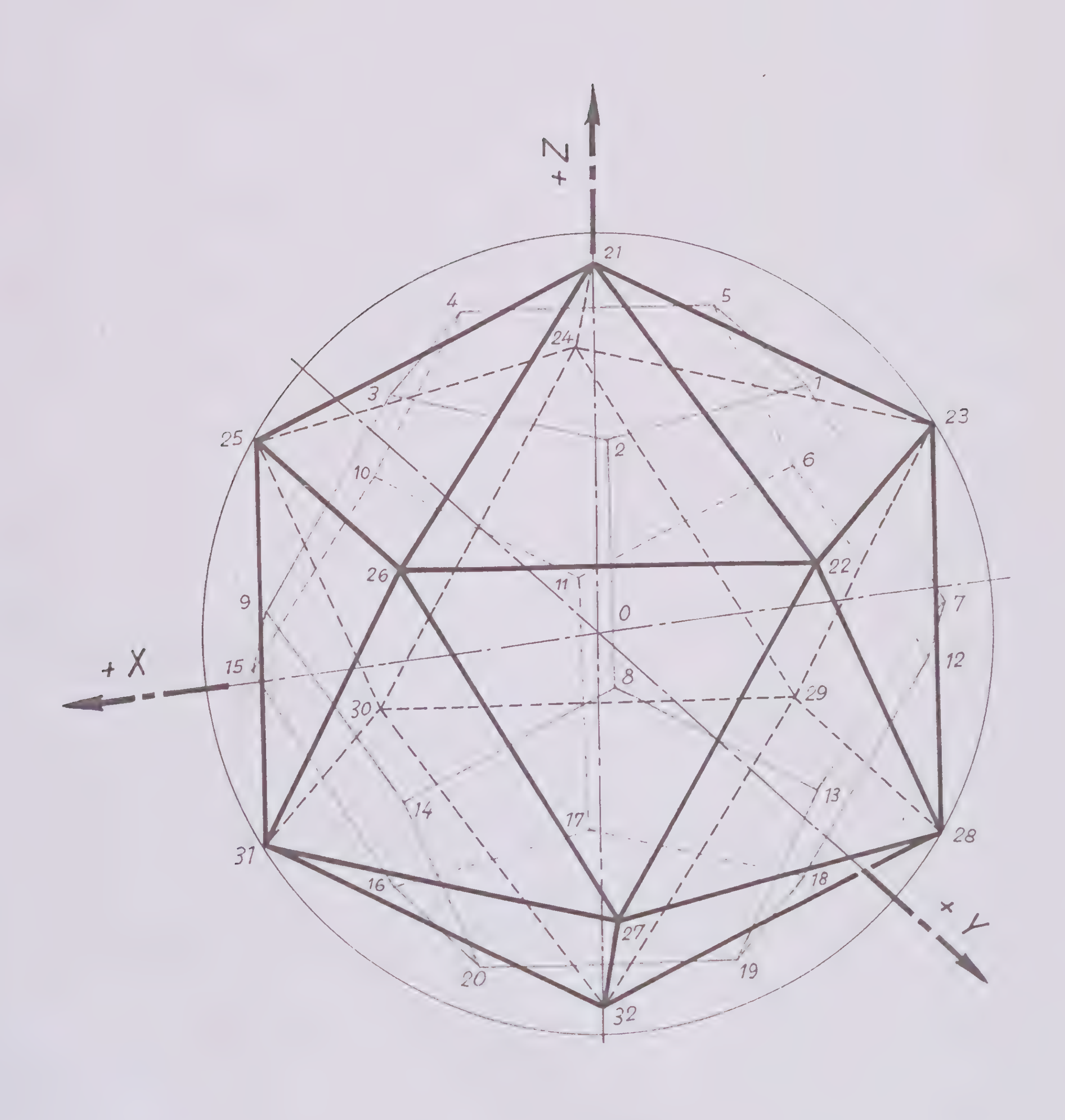
$$\left(S_{12} : S'_{20}\right)^2 = V_{12} : V'_{20}$$

UNE A4 210 X 297





I
III
II
ENUNCIADO
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I II y III, el icosaedro conjugado de un dodecaedro regular de 35,7 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del dodecaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son: 0 (72, 72, 85) milímetros.
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.
NUMERACIÓN DE VÉRTICES
Dodecadro dato .... 1 al 20
Icosaedro conjugado .... 21 al 32
Propuesta
De entrega
Entregada
Calificación
(firma)
Escuela
Curso
Fecha:
Alumno:
Escala
1 : 1
Poliedros regulares convexos conjugados
Lámina 16
Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 17

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular de 57.8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del icosaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_{20} = 57.8 mm



El poliedro conjugado de un icosaedro regular, es un dodecaedro regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del icosaedro, y ambas se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos ortogonalmente los vértices del dodecaedro conjugado sobre las respectivas caras del icosaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cada cara triangular del icosaedro.

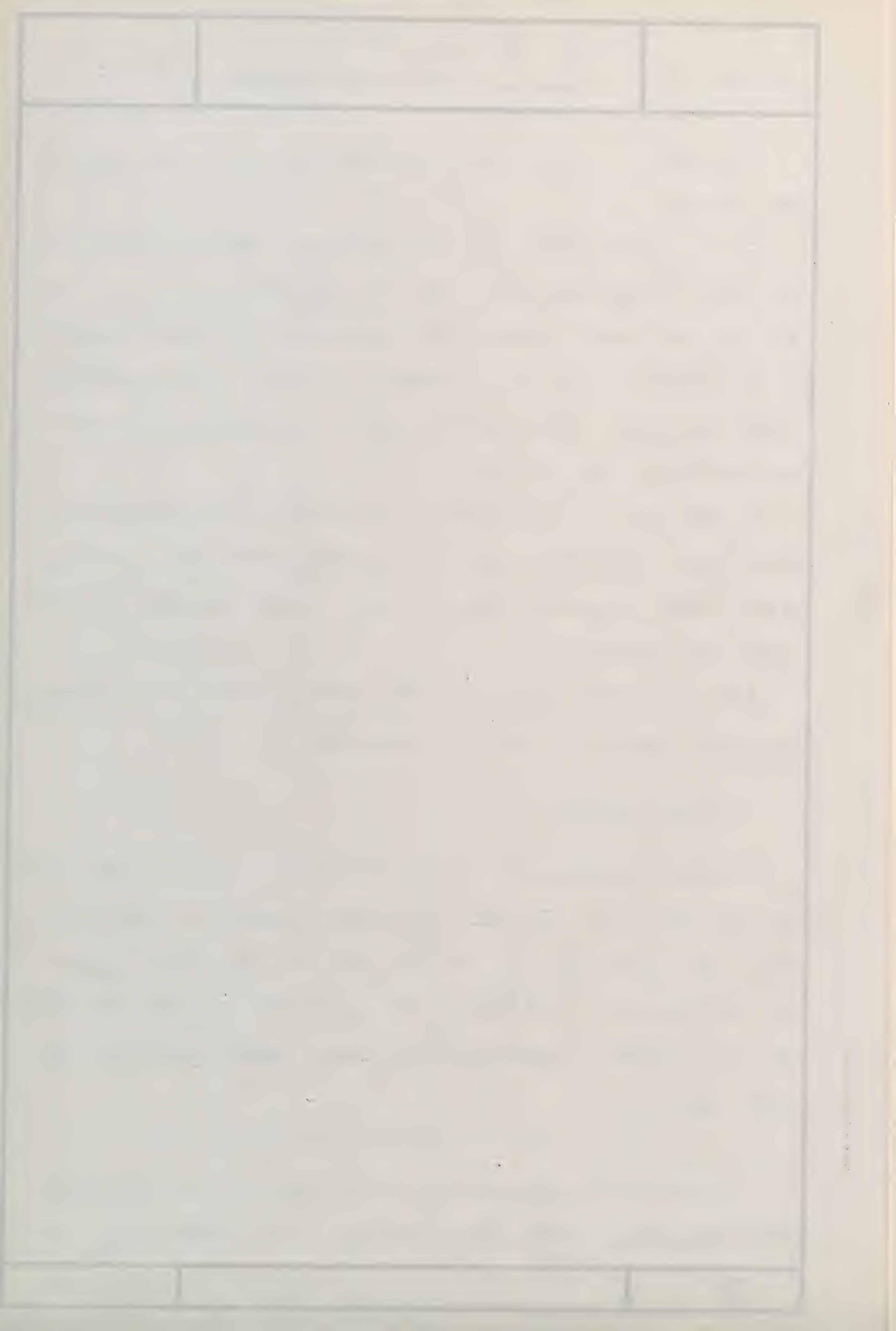
Estas propiedades nos permiten resolver fácilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Procedamos previamente a la representación del icosaedro dado en los planos I, II y III cuyo lado, conocido, es de 57,8 mm. Para ello utilizaremos el trazado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 5, determinando previamente el valor del radio a_{20} de la esfera circunscrita (ver Proceso gráfico-analítico) cuyo valor será:

$$a_{20} = 0{,}95\,10\,57 \times 57{,}8 = 55{,}0 \text{ mm}$$

Seguidamente, completaremos en el plano II la proyección del dodecaedro pedido, cuyo contorno es coincidente con el del



icosaedro dado, y las aristas de las bases, perpendiculares en el punto medio a las del icosaedro (se conserva la perpendicularidad en el plano II por ser dichas aristas de las bases, paralelas a II). Con ello se consigue la representación completa en el plano II.

La propiedad, que se conserva en proyecciones, de bisecarse las aristas de ambos poliedros, y teniendo la representación del dodecaedro conjugado en II, permite realizar la del mismo en el plano I, y con ambas proyecciones la del plano III.

Con la numeración adecuada de los vértices y centro de ambos poliedros quedará completada la representación pedida.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

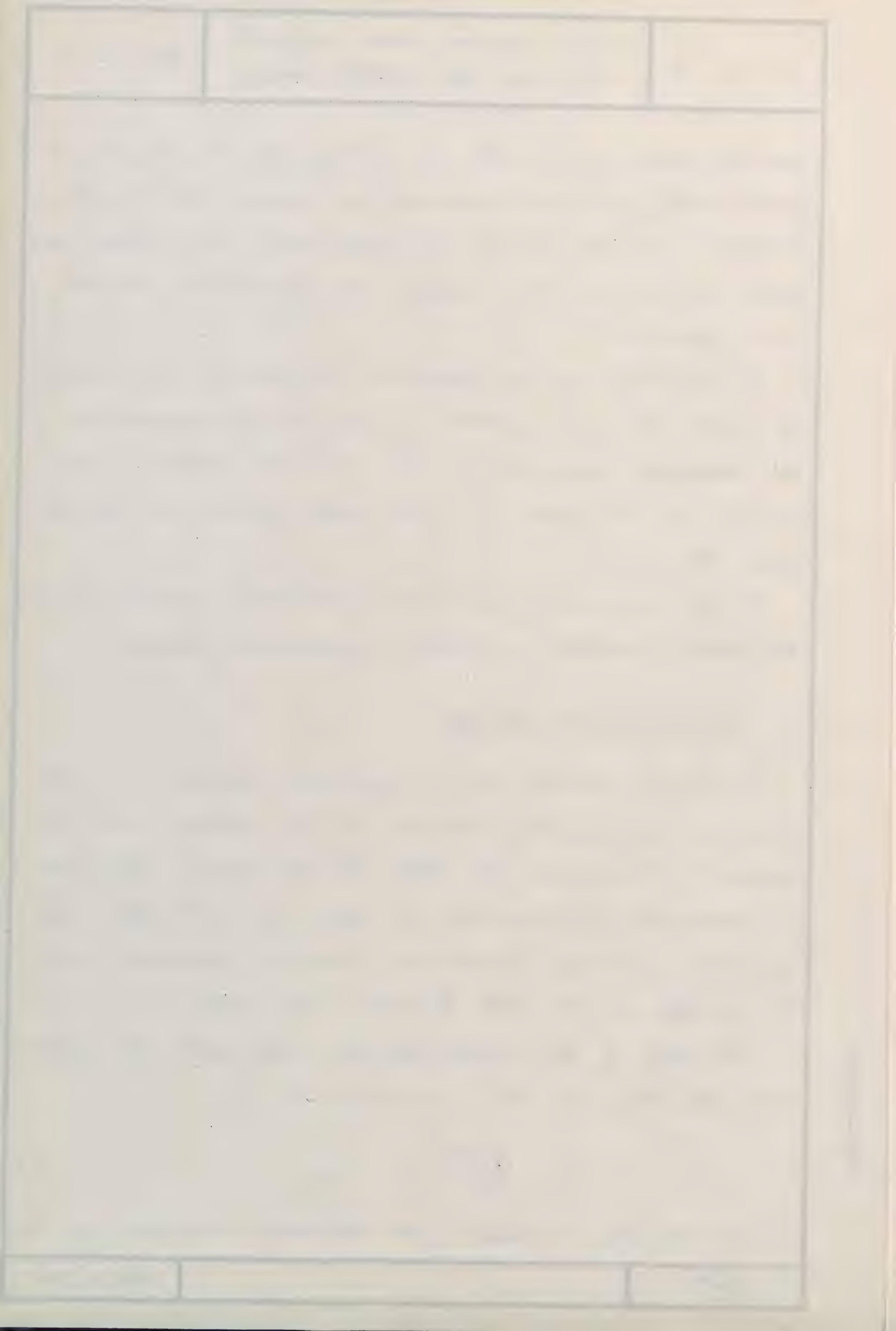
El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lámina 17 se desarrolla basándose en el efectuado en la lámina 4, en función del lado l'_{12} del icosaedro conjugado.

Previamente se determinará el radio a'_{12} de la esfera circunscrita al mismo, teniendo en cuenta la igualdad en ambos poliedros, de la esfera tangente a las aristas.

El radio b_{20} de la esfera tangente a las aristas del icosaedro dado, tiene por valor, en función de l_{20}

$$b_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\, l_{20} = b'_{12} \qquad [1]$$

y por otra parte, el lado l'_{12} del dodecaedro conjugado, en fun-



ción de b'_{12} es

$$l'_{12} = \frac{4}{3+\sqrt{5}}\ b'_{12} = \frac{4}{3+\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4}\ l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\ l_{20} = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4}\ l_{20} =$$

$$= \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{4}\ l_{20} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4}\ l_{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ l_{20} \qquad [2]$$

conocido l'_{12} en función de l_{20}, se calcularán los siguientes valores: (ver tabla figura 4):

$$l'_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ l_{20} = 0,61\,80\,34 \times 57,83\,03\,93 = 35,74\,11\,47 \quad *$$

siendo la relación $\frac{l'_{12}}{l_{20}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,61\,80\,34 \ldots$ [3]

y
$a'_{12} = 1,40\,12\,59 \times 35,74\,11\,47 = 50,1$ m.m
$b'_{12} = 1,30\,90\,17 \times$ id. $= 46,8$ "
$c'_{12} = 1,11\,35\,16 \times$ id $= 39,8$ "
$d'_{12} = 0,85\,06\,51 \times$ id $= 30,4$ "
$2\varphi_{12} = 116°\,33'\,54,2''$
$e'_{12} = 1,37\,63\,82 \times$ id $= 49,2$ "
$f'_{12} = 0,52\,57\,31 \times$ id $= 18,8$ "
$g'_{12} = 0,85\,06\,51 \times$ id $= 30,4$ "

---

* El valor más aproximado del lado l_{20} dado, se obtiene del exacto $a_{20} = 55$ m.m.; de donde $l_{20} = 55 : 0,95\,10\,57 = 57,83\,03\,93$ y de aquí: $b_{20} = 57,83\,03\,93 \times 0,80\,90\,17 = 46,78\,57\,69$, por lo que será: será: $l'_{12} = 46,78\,57\,69 : 1,30\,90\,17 = 35,74\,11\,47$



$$i''_{12} = 0,850651 \times 35,741147 = 30,4 \text{ mm}$$

$$k'_{12} = 0,688191 \times \quad id \quad = 24,6 \quad ''$$

Obsérvese que siendo

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\; l'_{12} \qquad \text{y} \qquad e_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

y según [3] $\dfrac{l'_{12}}{l_{20}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, se verificará que

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\; l'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}$$

de donde $e'_{12} = e_{20}$

El desarrollo del cálculo anterior es el siguiente:

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\; l'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{20}}\; l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{20}}\; l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10}}\; l_{20} = \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{10}}\; l_{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}}$$

lo cual nos demuestra que: "El radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno en I del dodecaedro conjugado, es igual al del icosaedro dado en la misma proyección".

De aquí se deduce que los lados de ambos decágonos



son también iguales, por lo que

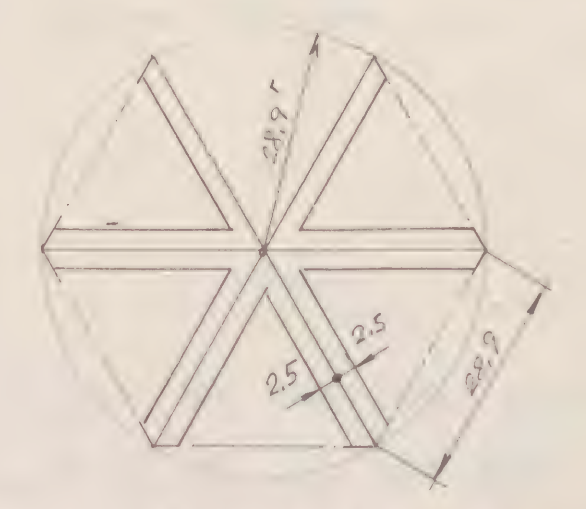
$$i'_{12} = i_{20}$$

FIGURA CORPÓREA

El dodecaedro conjugado se obtiene por el acoplamiento de 12 pentágonos regulares de 35,7 mm de lado.

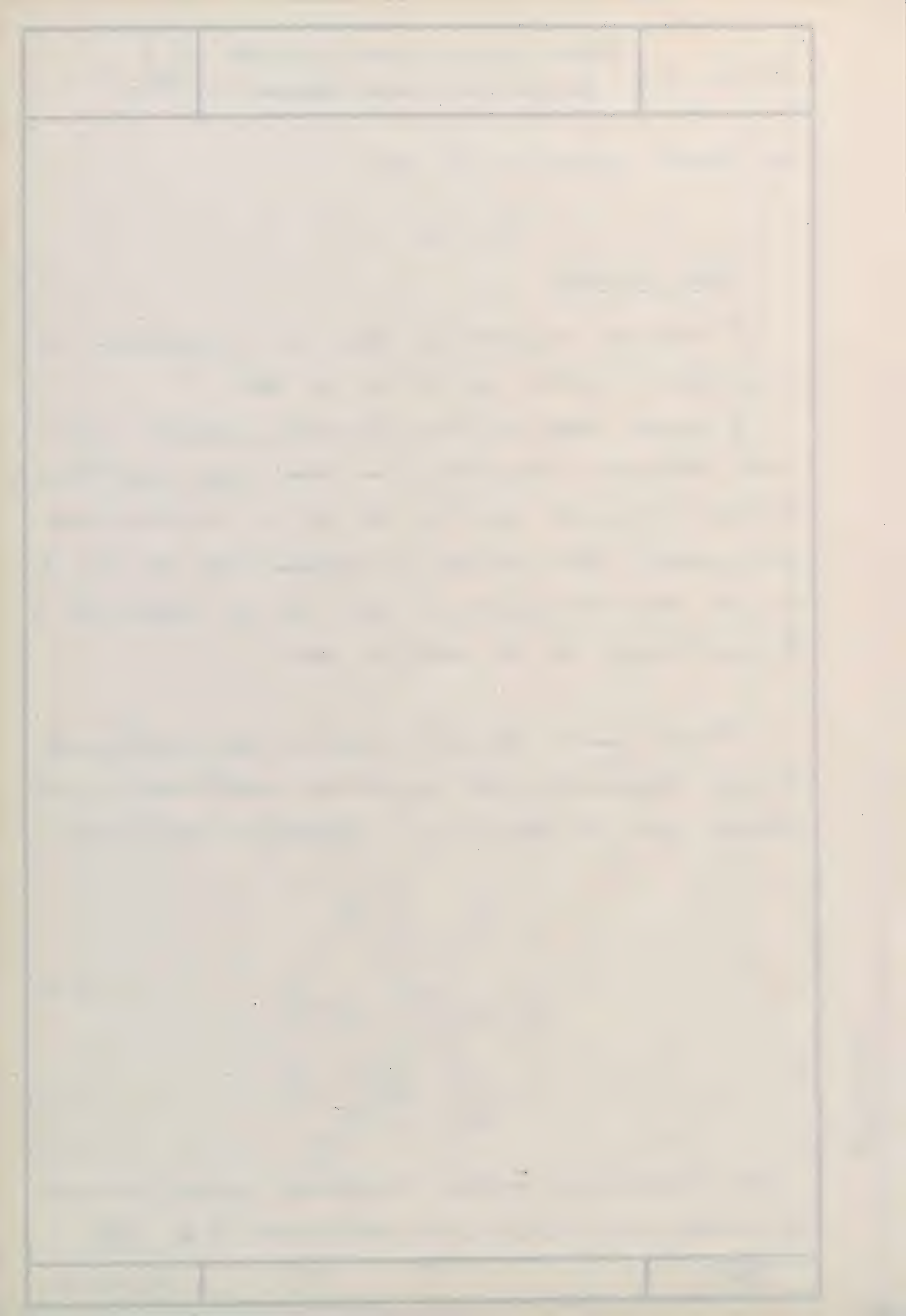
El icosaedro dado se obtiene formando previamente 12 pirámides pentagonales (transparentes y sin base), cuyas caras laterales son 5 triángulos equiláteros de 28,9 mm (mitad del lado del icosaedro). Estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las doce caras del conjugado, de forma que sus vértices estén en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el icosaedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 12 pirámides pentagonales, por las obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



12 (u)

Estas 12 pirámides se acoplarán al dodecaedro conjugado, colocando sus vértices A, B, C, D, E, en los puntos medios de las aristas



RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada:

l'_{12} = Lado del dodecaedro conjugado.

a'_{12} = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_{12} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_{12} = Radio de la esfera inscrita.

d'_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_{12}$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e'_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno de la vista II.

f'_{12} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g'_{12} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

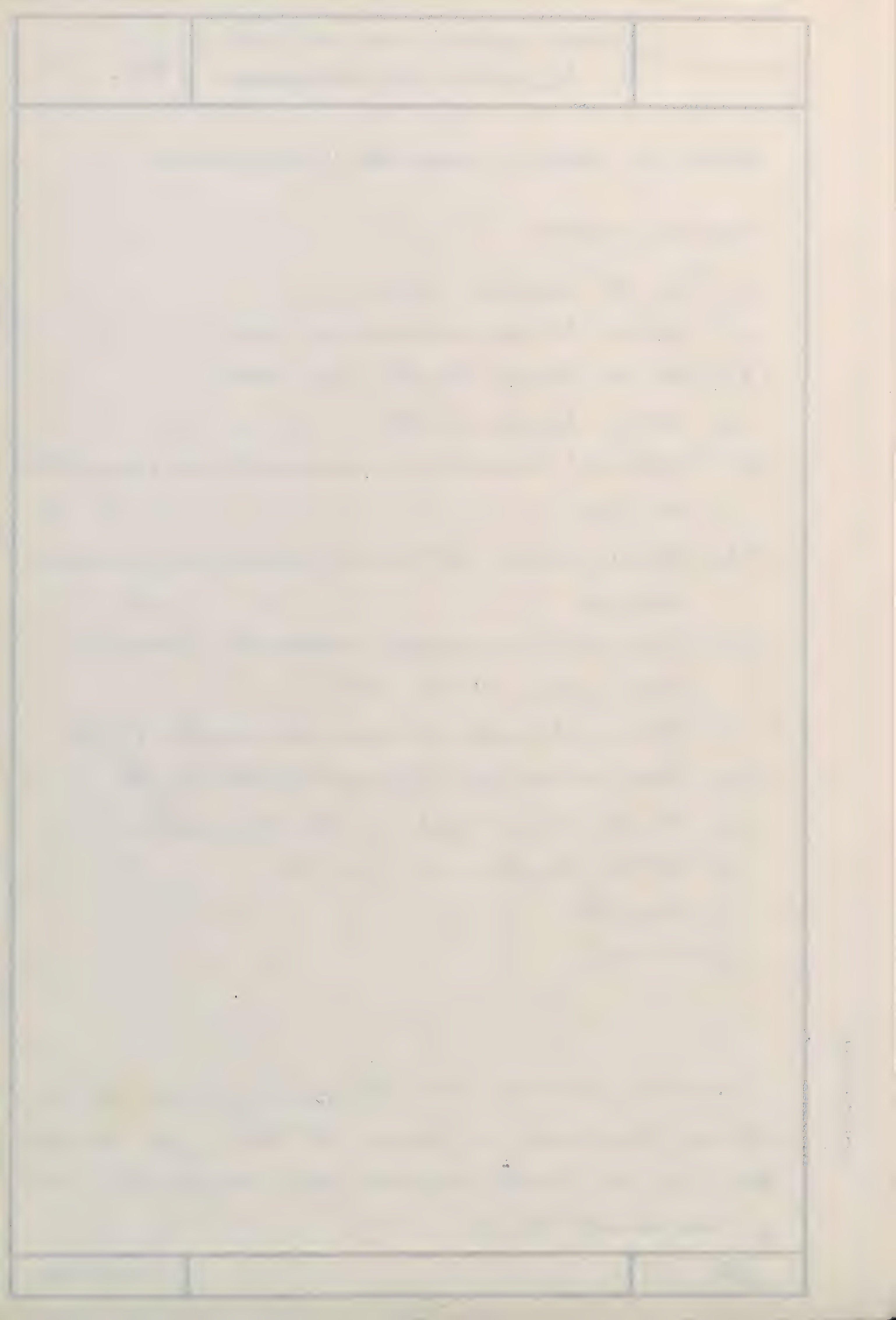
l'_{12} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k'_{12} = Apotema del polígono de una cara.

S'_{12} = Superficie.

V'_{12} = Volumen.

Los valores anteriores del dodecaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_{20} del icosaedro dado, ya que el valor conocido de l'_{12} en función de l_{20} (ver fórmula [2]), es



$$l'_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 30 a 41 de la lámina 4, tendremos:

$$a'_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $a'_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \frac{\sqrt{75}+\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}\, l_{20} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8}\, l_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\, l_{20}}$$

$$b'_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $b'_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{8}\, l_{20} = \frac{2\sqrt{5}+2}{8}\, l_{20} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\, l_{20}}$$

$$c'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $c'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(\sqrt{5}-1)^2}{40 \times 4}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(5+1-2\sqrt{5})}{40 \times 4}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(3-\sqrt{5})}{40 \times 2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{33\sqrt{5}+75-55-25\sqrt{5}}{40 \times 2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{80}}\, l_{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\, l_{20}}$$



$$d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{10 \times 4}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{40}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{20}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{20}}\, l_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{5 \times 4}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{20}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{10}}\, l_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$f'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $f'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{10 \times 4}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{40}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{20}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{20}}\, l_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}}$$

$$g'_{12} = i'_{12} = d'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$



$$k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20} = \frac{1}{2}\, e'_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{20 \times 4}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{80}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{40}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10}{40}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$S'_{12} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^2 = \frac{3}{2}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\, l_{20}^2$$

Desarrollo del cálculo anterior: $S'_{12} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^2 =$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\, l_{20}^2 = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\, l_{20}^{20} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{(25+10\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2}\, l_{20}^2 = \frac{3}{2}\sqrt{(25+10\sqrt{5})(9+5-6\sqrt{5})}\, l_{20}^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{(25+10\sqrt{5}) \times 2 \times (7-3\sqrt{5})}\, l_{20}^2 = \frac{3}{2}\sqrt{2 \cdot (175+70\sqrt{5}-75\sqrt{5}-150)}\, l_{20}^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2 \times (25-5\sqrt{5})}\, l_{20}^2 = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{10 \times (5-\sqrt{5})}\, l_{20}^2}$$

$$V'_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^3 = \frac{5+\sqrt{5}}{4}\, l_{20}^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V'_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{8}\, l_{20}^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{8}\, l_{20}^3 =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{8\sqrt{5}-16}{8} l_{20}^3 = \frac{(7\sqrt{5}+15)(\sqrt{5}-2)}{4} l_{20}^3 = \frac{35+15\sqrt{5}-14\sqrt{5}-30}{4} l_{20}^3 =$$

$$= \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{4} l_{20}^3}$$

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\frac{l_{20}}{l'_{12}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (ver fórmula [?])

b) $\frac{S_{20}}{S'_{12}} = \frac{5\sqrt{3} \quad l_{20}^2}{\frac{3}{2}\sqrt{10(5-\sqrt{5})} \quad l_{20}^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{S_{20}}{S'_{12}} = \frac{5\sqrt{3} \quad l_{20}^2}{\frac{3}{2}\sqrt{10(5-\sqrt{5})} \quad l_{20}^2} =$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{3\sqrt{10(5-\sqrt{5})}} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3 \times 10 \times (5-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})}}{3(5-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})} \times (5+\sqrt{5})}{3 \times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{30(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}}{60} = \frac{\sqrt{30 \times 20 \times (5+\sqrt{5})}}{60} = \frac{\sqrt{6 \times (5+\sqrt{5})}}{6} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}}$$

c) $\frac{V_{20}}{V'_{12}} = \frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12} l_{20}^3}{\frac{5+\sqrt{5}}{4} l_{20}^3} = \frac{5+\sqrt{5}}{6}$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{V_{20}}{V'_{12}} = \frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12} l_{20}^3}{\frac{5+\sqrt{5}}{4} l_{20}^3} =$

$$= \frac{4(15+5\sqrt{5})}{12(5+\sqrt{5})} = \frac{(15+5\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3 \times 20} = \frac{75+25\sqrt{5}-15\sqrt{5}-25}{60} = \frac{50+10\sqrt{5}}{60} =$$

$$= \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}$$

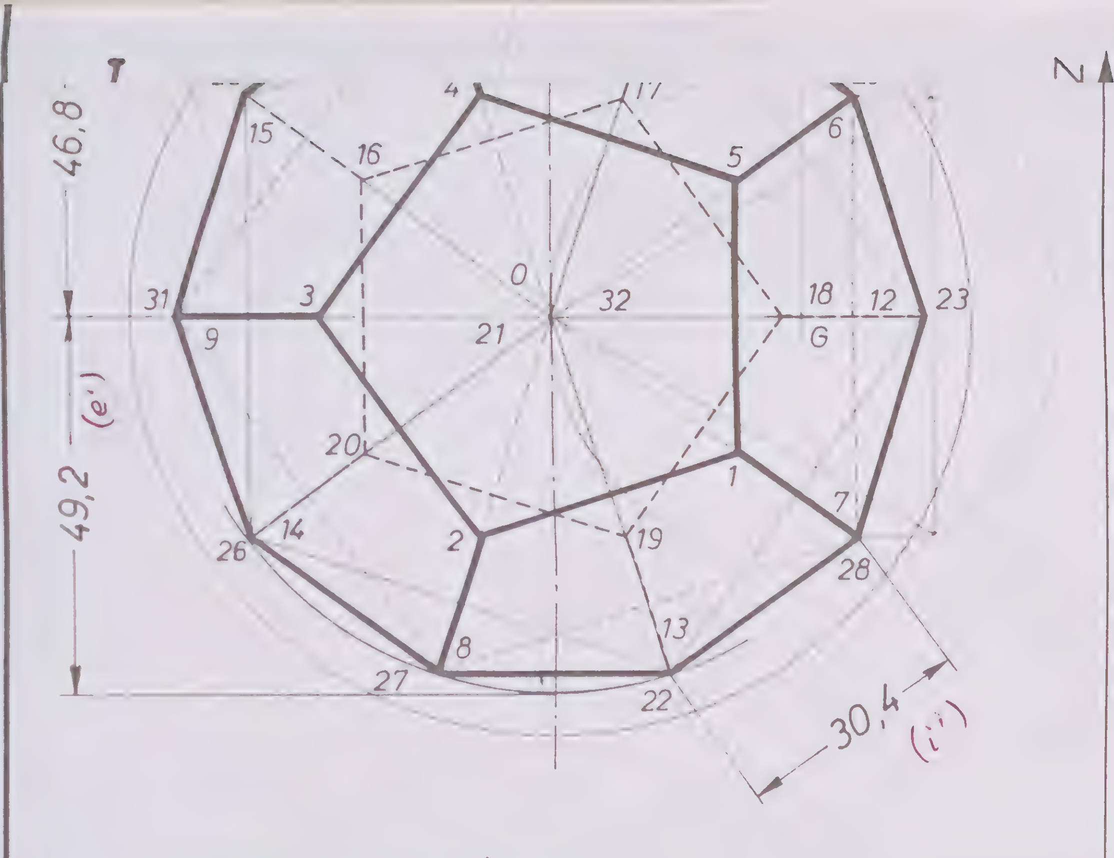


En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos los resultados anteriores.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(181) l'_{12}	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\ l_{20}$	$0,61\ 80\ 34 \ldots\ l_{20}$
(182) a'_{12}	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ l_{20}$	$0,86\ 60\ 25 \ldots\ l_{20}$
(183) b'_{12}	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ l_{20}$	$0,80\ 90\ 17 \ldots\ l_{20}$
(184) c'_{12}	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ l_{20}$	$0,68\ 81\ 91 \ldots\ l_{20}$
(185) d'_{12}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0,52\ 57\ 31 \ldots\ l_{20}$
(186) $2\varphi_{12}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12} = 0,85\ 06\ 51$ $2\varphi_{12} = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$
(187) e'_{12}	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0,85\ 06\ 51 \ldots\ l_{20}$
(188) f'_{12}	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	$0,32\ 49\ 20 \ldots\ l_{20}$
(189) g'_{12}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0,52\ 57\ 31 \ldots\ l_{20}$
(190) i'_{12}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0,52\ 57\ 31 \ldots\ l_{20}$
(191) k'_{12}	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	$0,42\ 53\ 25 \ldots\ l_{20}$
(192) S'_{12}	$\frac{3}{2}\sqrt{10\times(5-\sqrt{5})}\ l_{20}^2$	$7,88\ 59\ 67 \ldots\ l_{20}^2$
(193) V'_{12}	$\frac{5+\sqrt{5}}{4}\ l_{20}^3$	$1,80\ 90\ 17 \ldots\ l_{20}^3$
Relaciones entre magnitudes		
$l_{20} : l'_{12}$	(194) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$1,61\ 80\ 34 \ldots$
$S_{20} : S'_{12}$	(195) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{6}}$	$1,09\ 81\ 85 \ldots$
$V_{20} : V'_{12}$	(196) $\frac{5+\sqrt{5}}{6}$	$1,20\ 60\ 11 \ldots$





NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Icosaedro dato .... 21 al 32

Dodecaedro conjugado .... 1 al 20

co-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular de 57,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del icosaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son: 0 (72, 72, 85) mm.

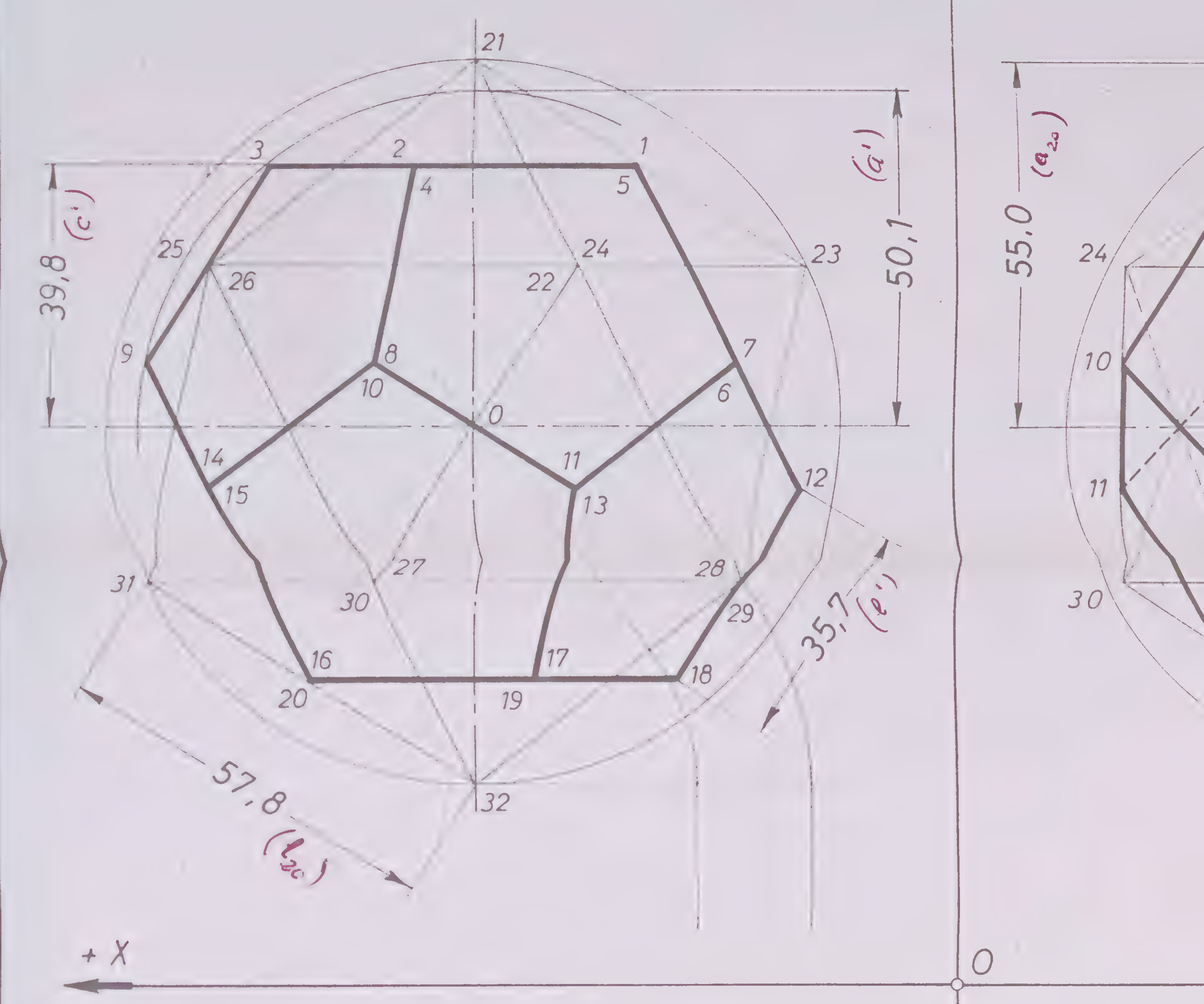
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

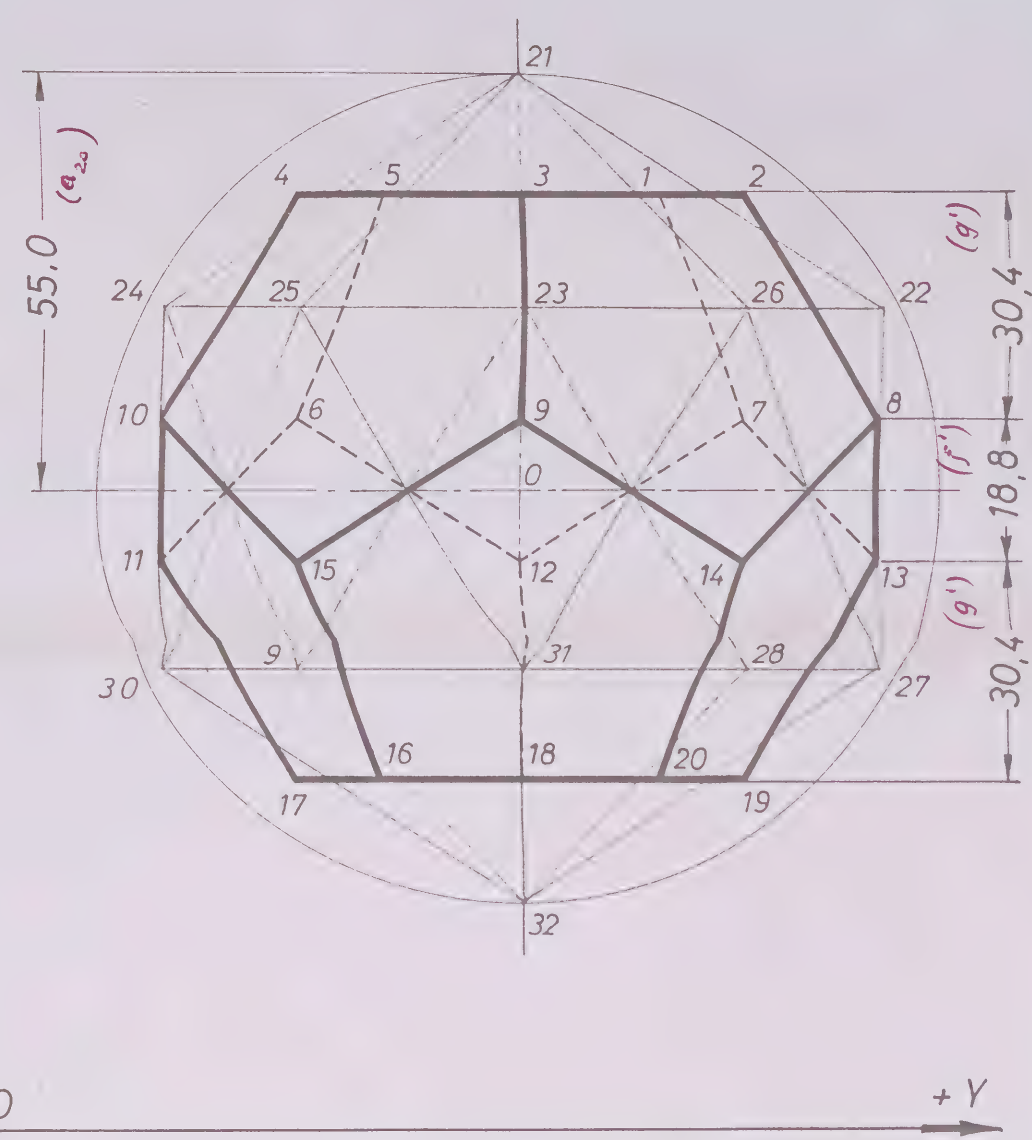
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 17 Curso 19 -19





II

46,8 (b')

49,2 (e')

30,4 (i')

+Y

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Icosaedro dato.............. 21 al 32

Dodecaedro conjugado....... 1 al 20

ENUNCIADO

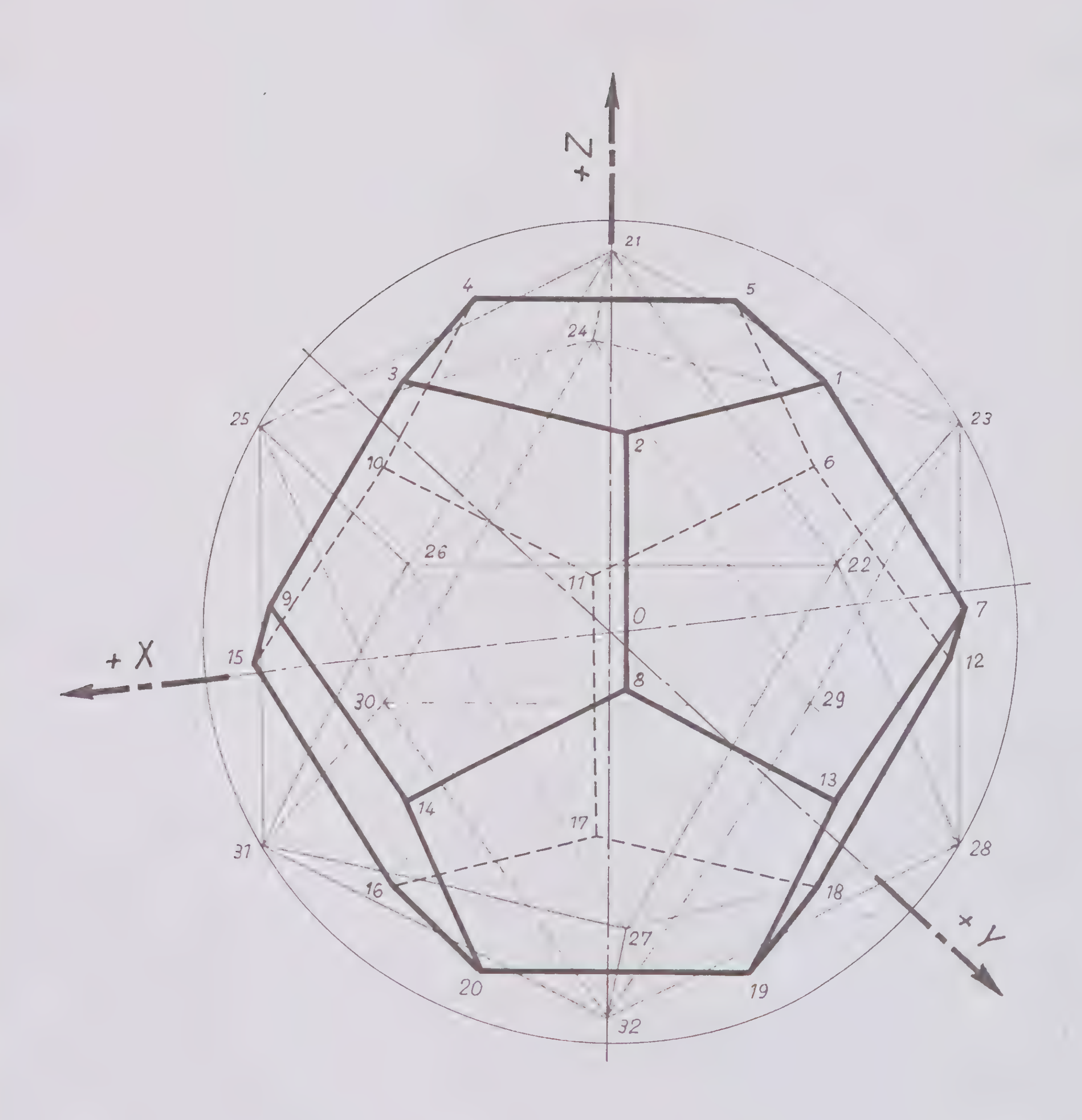
Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular de 57,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del icosaedro dado, rectas perpendículares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son: 0(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 17 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 18

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II, y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en las láminas 16 y 17.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS $O\ (72,\ 72,\ 85)$ mm

$l_{12} = 35.7$ mm

$l'_{30} = 57.8$ mm

UNE A4 210 X 297



Lámina 18	Poliedros regulares convexos conjugados Conjunto del {DODECAEDRO / ICOSAEDRO} REGULAR	Hoja n.º 1

El poliedro representado en la lámina 18, intersección de un dodecaedro regular con un icosaedro también regular, conjugado del anterior, de centro común y con la esfera tangente a las aristas igualmente común a ambos, se obtiene completando el trazado de la lámina 16 (o el de la lámina 17), con los triángulos equiláteros y pentágonos regulares que se forman al ser cortado cada ángulo sólido de uno de ellos por las caras del otro. Los vértices de estos polígonos estarán en los puntos medios de las aristas de ambos poliedros.

El "Proceso gráfico" y el "Proceso gráfico-analítico" de la mencionada lámina 16 (o de la 17), sirve igualmente para este ejercicio.

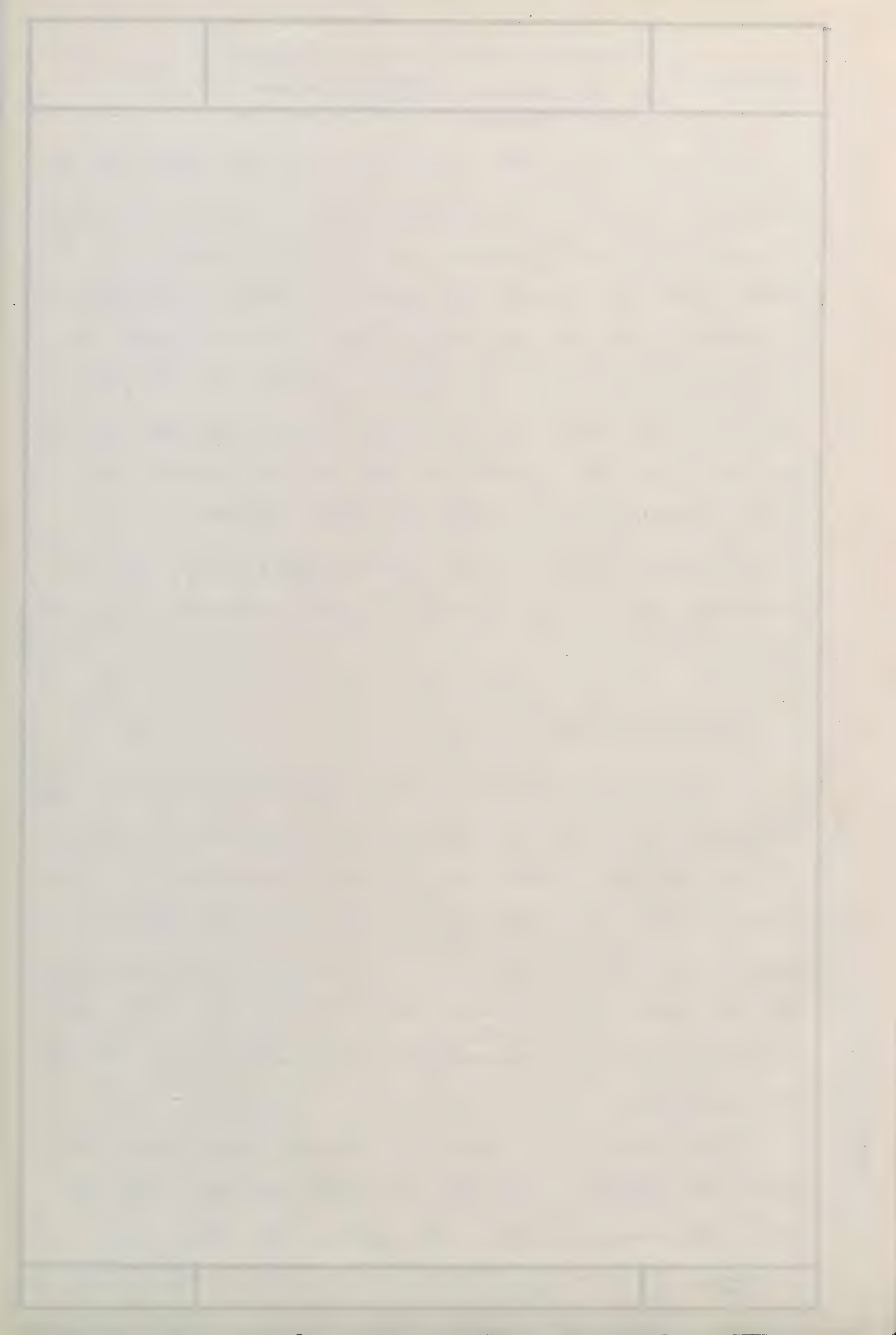
FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 12 pirámides rectas (sin base), compuesta cada una de ellas por 5 triángulos equiláteros de 28,9 mm de lado (mitad de l_{20} = 57,8 mm) correspondientes al icosaedro regular, con otras 20 pirámides rectas (sin base), compuesta cada una de ellas por 3 triángulos rectángulos isósceles de catetos de 17,9 mm de lado (mitad de l_{12} = 35,7) e hipotenusa de 28,9 mm, correspondientes estas últimas al dodecaedro conjugado.

Este poliedro es cóncavo ya que la prolongación del plano de cualquier cara de uno de los poliedros, deja en distintos semiespacios a los vértices del otro.

UNE A4 210 X 297

[signature]		29 - 4 - 82



CALCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

El núcleo de este poliedro es el sólido común en la intersección de un dodecaedro regular con su icosaedro conjugado con respecto a los puntos medios de sus aristas.

Este sólido común es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros de lados de igual longitud en ambos polígonos. Sus ángulos poliedros (30 en total) son todos iguales y en cada uno de ellos concurren dos caras pentagonales y dos triangulares en forma alternada. Este poliedro entra en el grupo de los llamados "Arquimedianos", cuyo estudio y representación desarrollamos en las láminas 33 a 48. Corresponde al designado por "Arquimediano IV" (lámina 36), donde se detalla el cálculo analítico de sus principales magnitudes, algunas de ellas de aplicación en el poliedro estudiado en esta lámina.

α = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras secantes contiguas.

El diedro α, formado por una cara del dodecaedro con la cara secante contigua del icosaedro conjugado es opuesto por el vértice al diedro $\varphi_{3 \cdot 5}$ del Arquimediano IV que forma su núcleo, y por consiguiente de igual magnitud que éste; su valor será pues: (ver lámina)



Lámina 18	Poliedros regulares convexos conjugados Conjugado del { DODECAEDRO / ICOSAEDRO } REGULAR	Hoja nº 3

$$\alpha = \qquad [1]$$

S = Area lateral en función de l_{20}

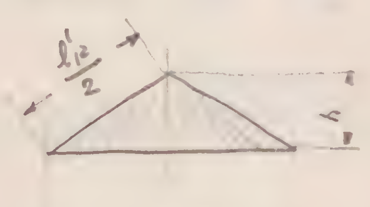
La superficie lateral está compuesta:

1) De 12 pirámides P_5, cuyas caras laterales son 5 triángulos equiláteros de lado igual a $\frac{l_{20}}{2}$, y
2) De 20 pirámides P_3, cuyas caras laterales son 3 triángulos isósceles de base igual a $\frac{l_{20}}{2}$ y lados contiguos a la base (iguales entre sí), iguales a $\frac{l'_{12}}{2}$

El área lateral de las 12 pirámides P_5 será pues

$$S_1 = 12 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 = \frac{15\sqrt{3}}{4} l_{20}^2 \quad \text{(comprobado)}$$

Para el cálculo del área lateral de P_3, determinemos previamente la altura de una de sus caras (ver figura), en la que (ver lám. 17, fórmula 181)



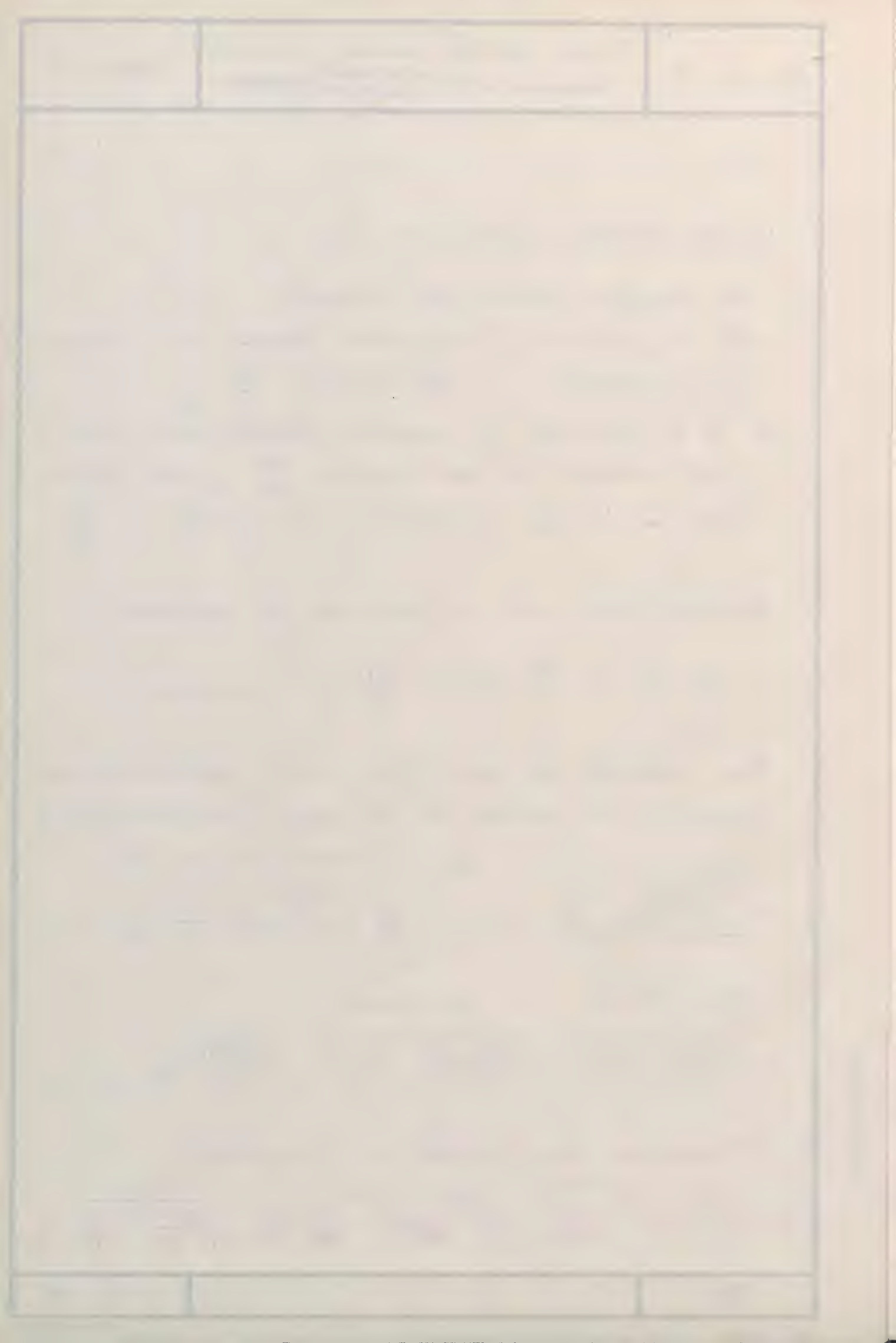
$$\frac{l'_{12}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} l_{20}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} l_{20}$$

de donde

$$h = \sqrt{\left(\frac{l'_{12}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l_{20}}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} l_{20}\right)^2 - \frac{1}{16} l_{20}^2} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4} l_{20}$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} l_{20}\right)^2 - \frac{1}{16} l_{20}^2} = \sqrt{\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16}} \times l_{20} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{16}} \times l_{20} =$$



$$= \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5} - 1}{16}}\; l_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{4}\; l_{20}}$$

El área lateral de las 20 pirámides P_3, será pues

$$S_2 = 20 \times 3 \times \frac{l_{20}}{2} \times \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}\right) l_{20} = \frac{15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20}^2$$

y el área total S,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{15\sqrt{3}}{4}\, l_{20}^2 + \frac{15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20}^2 = \frac{15\sqrt{3} + 15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20}^2 =$$

$$= \frac{15\left(\sqrt{3} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{4}\, l_{20}^2 = 9{,}21\ 97\ 25 \ldots\, l_{20}^2 \qquad [2]$$

S = Area lateral en función de l_{12}

De la relación $\frac{l_{20}}{l_{12}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (ver lám. 17, fórm. 19ª)

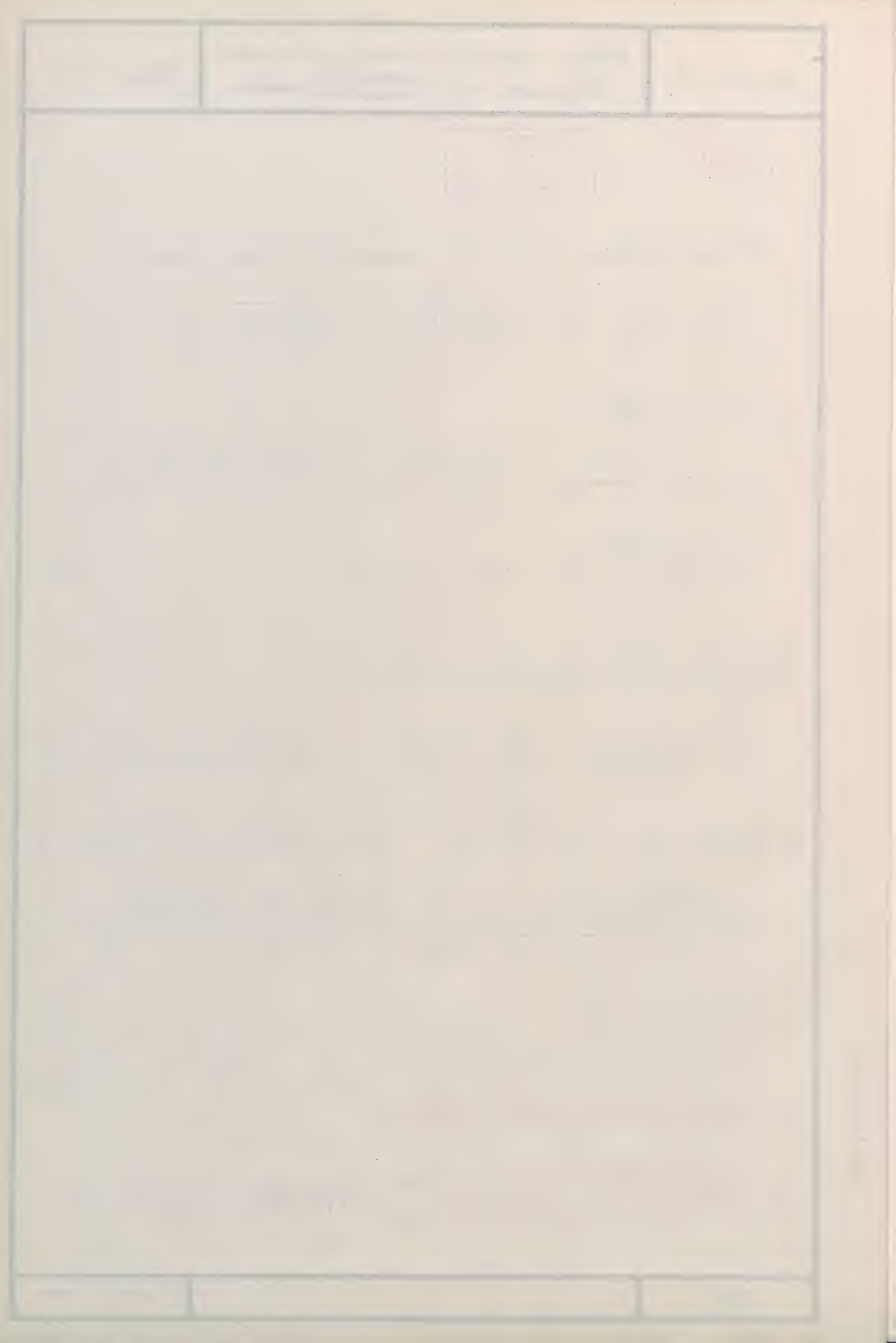
se deduce que $l_{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12}$, que sustituido en [2] nos da

$$S = \frac{15\left(\sqrt{3} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12}\right)^2 = \frac{15\left(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}\, l_{12}^2 =$$

$$= 24{,}13\ 75\ 53 \ldots\, l_{12}^2 \qquad [3]$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$S = \frac{15\left(\sqrt{3} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12}\right)^2 = \frac{15}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\right) \times \frac{5+1+2\sqrt{5}}{4}\, l_{12}^2 =$$



$$= \frac{15}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)\left(3+\sqrt{5}\right) l_{12}^{2} = \frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{2}}\right) l_{12}^{2} =$$

$$= \frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{(5-2\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}\right) l_{12}^{2} = \frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})\times 2}\right) l_{12}^{2} = \frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{2\times(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)}\right) l_{12}^{2} =$$

$$= \frac{15}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right) l_{12}^{2} = \boxed{\frac{15\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{8}\, l_{12}^{2}}$$

V = Volumen en función de l_{20}

El volumen total de este poliedro se puede obtener como suma de volúmenes de uno de los poliedros regulares y de las pirámides complementarias formadas en cada una de las caras del primero por la intersección de los ángulos sólidos del otro.

1) Considerando como primer sumando el volumen del dodecaedro, éste será (ver lám. 4, fórm. 41):

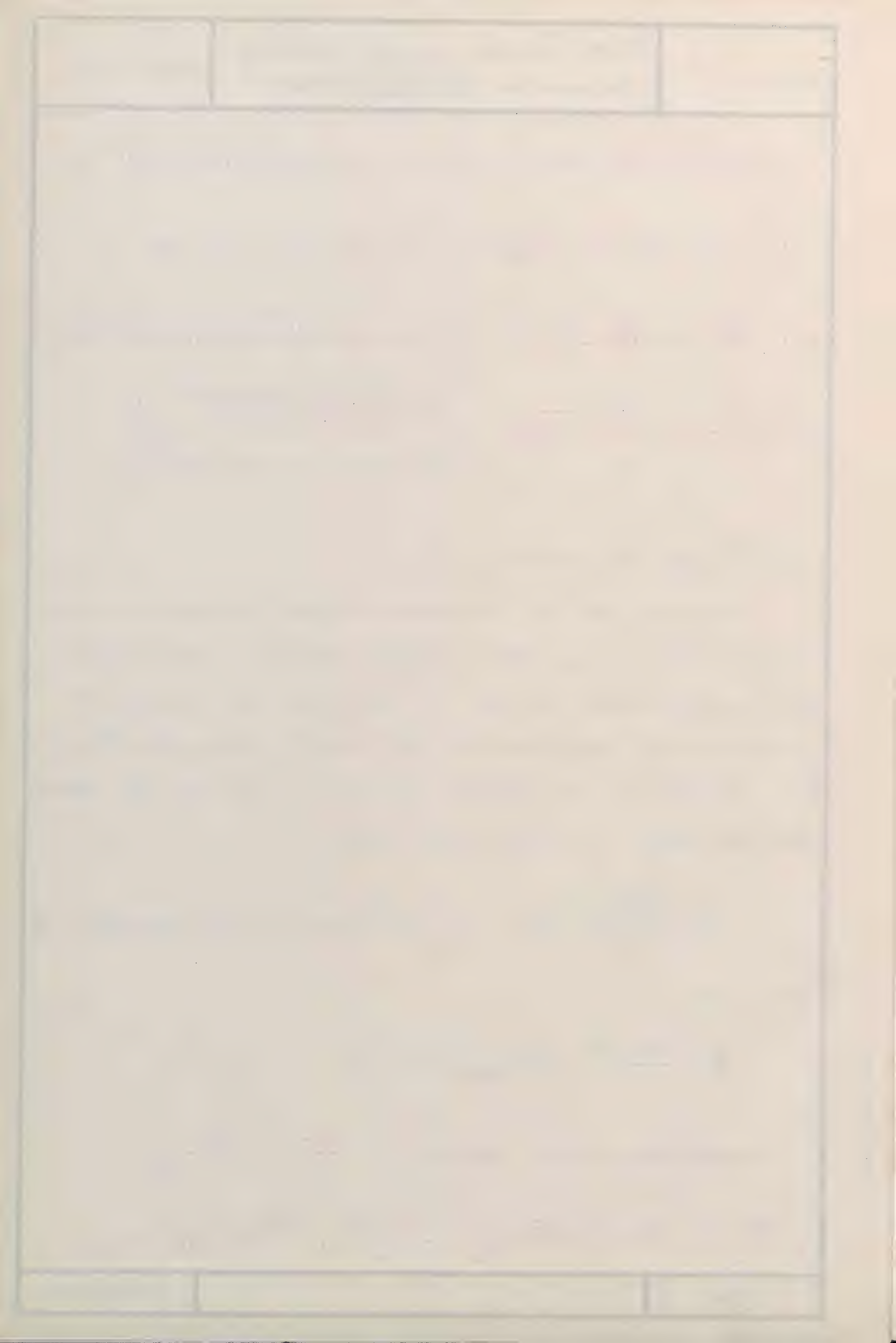
$$V_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\, l_{12}^{3}$$

y en función de l_{20} (ver lám. 17, fórm. 181)

$$V_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^{3} = \frac{5+\sqrt{5}}{4}\, l_{20}^{3}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^{3} =$

$$= \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{5\sqrt{5}-15+3\sqrt{5}-1}{8}\, l_{20}^{3} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{8\sqrt{5}-16}{8}\, l_{20}^{3} =$$



$$= \frac{(7\sqrt{5}+15)(\sqrt{5}-2)}{4}\, l_{20}^3 = \frac{35+15\sqrt{5}-14\sqrt{5}-30}{4}\, l_{20}^3 = \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{4}\, l_{20}^3}$$

2) Las 12 pirámides complementarias tienen por base un pentágono regular de lado igual a $\frac{l_{20}}{2}$, y las caras laterales formadas por 5 triángulos equiláteros también de lado $\frac{l_{20}}{2}$; el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono de la base, se obtiene de la fórmula de Geometría métrica

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

en la que despejando R y sustituyendo l_5 por $\frac{l_{20}}{2}$, nos dará

$$R = \frac{2\, l_5}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $R = \frac{2\, l_5}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{4}{10-2\sqrt{5}}}\, l_5 =$

$$= \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\, l_5 = \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{20}}\, l_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{l_{20}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

La altura h de una de las pirámides anteriores, la

(sigue y concluye este párrafo en el reverso)

$$h = \sqrt{\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $h = \sqrt{\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}\right)^2} =$

calcularemos teniendo en cuenta que es un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\frac{l}{2}$ y el otro cateto es R (proyección de $\frac{l}{2}$ sobre el plano del polígono de una cara del dodecaedro. Por consiguiente tendremos que

$$= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{20} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}}$$

El área de la base pentagonal, será (ver Geometría métrica)

$$S_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2$$

y el volumen de las 12 pirámides pentagonales

$$V_2 = 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{16}\; l_{20}^3$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$V_2 = 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}^3 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{(25+10\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{10}}\; l_{20}^3 =$$

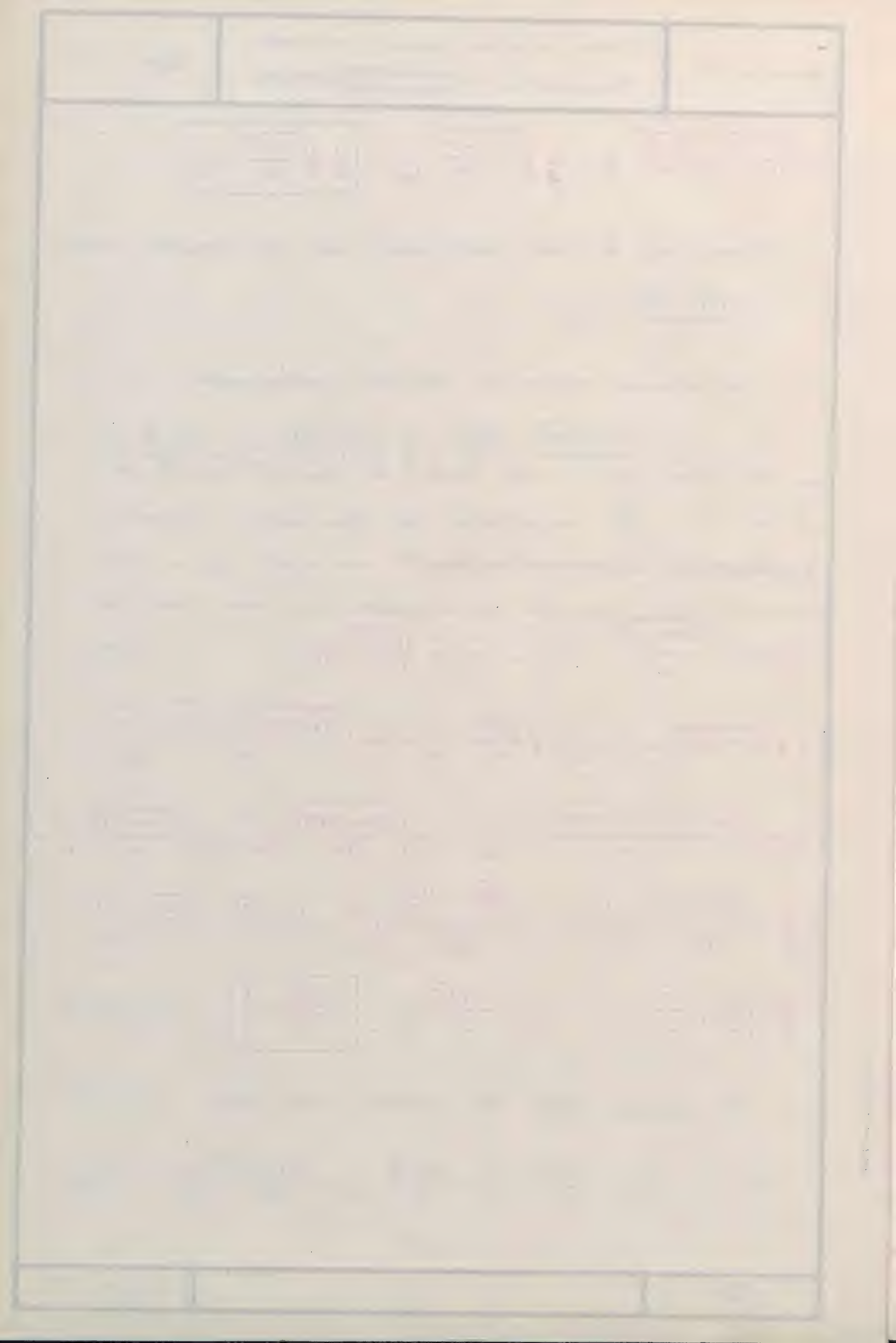
$$= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{125+50\sqrt{5}-25\sqrt{5}-50}{10}}\; l_{20}^3 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{75+25\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}^3 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}\; l_{20}^3 =$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{15+5\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}\; l_{20}^3 = \frac{1}{8} \times \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}}\; l_{20}^3 = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right) l_{20}^3 =$$

$$= \frac{1}{8} \times \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) l_{20}^3 = \frac{1}{8} \times \frac{5+\sqrt{5}}{2}\; l_{20}^3 = \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{16}\; l_{20}^3}$$

El volumen total del poliedro, será pues

$$V = V_1 + V_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{4}\; l_{20}^3 + \frac{5+\sqrt{5}}{16}\; l_{20}^3 = \frac{5(5+\sqrt{5})}{16}\; l_{20}^3 \qquad [4]$$



Llegaríamos al mismo resultado considerando como primer sumando el volumen del icosaedro regular y como segundo sumando las 20 pirámides triangulares procedentes de los ángulos sólidos del dodecaedro.

Los cálculos justificativos son los siguientes:

1) Volumen del icosaedro

$$V_{20} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}\, l_{20}^3 \qquad \text{(ver lám. 4, fórm. 41)}, \quad y$$

2) Volumen de las 20 pirámides triangulares, cuya base es un triángulo equilátero de lado $\frac{l_{20}}{2}$ y altura el cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\frac{l_{12}}{2}$ y radio R de la circunferencia circunscrita al triángulo de la base.

Sabiendo que, según se estudia en Geometría métrica, el área de un triángulo equilátero de lado $\frac{l_{20}}{2}$, es de

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}\, l_{20}^2$$

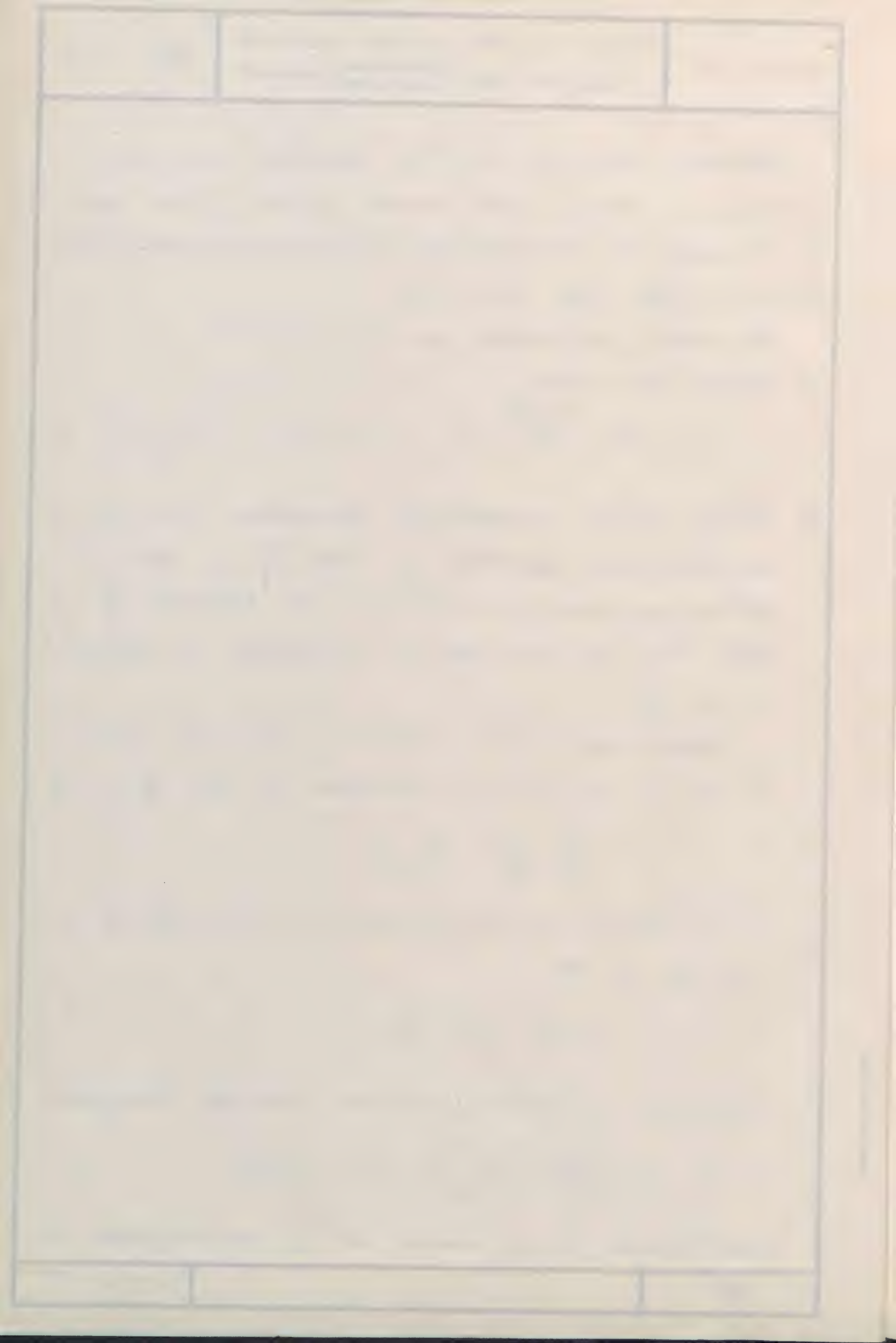
y el radio R de la circunferencia circunscrita a dicha base es de

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{l_{20}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, l_{20}$$

calcularemos la altura $\underline{h}$ de una pirámide triangular

$$h = \sqrt{\left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\, l_{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\, l_{12}^2 - \frac{1}{12}\, l_{20}^2}$$

y sustituyendo l_{12} en función de l_{20} (ver lám. 17, fórm. 181)



Tendremos que

$$h = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^2 - \frac{1}{12}\, l_{20}^{\,2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $h = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\right)^2 - \frac{1}{12}\, l_{20}^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 l_{20}^2 - \frac{1}{3}\, l_{20}^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{3}} \times l_{20} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}}\; l_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-3\sqrt{5}-2}{6}}\; l_{20} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{6}}\; l_{20} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7-3\sqrt{5}}}{\sqrt{6}}\, l_{20} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}}\, l_{20} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{9}{12}} - \sqrt{\frac{5}{12}}\right) l_{20} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) l_{20} = \frac{1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) l_{20} = \boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\, l_{20}}$$

El volumen V_2 de las 20 pirámides, valdrá pues

$$V_2 = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{16}\, l_{20}^2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\, l_{20}\right) = \frac{20 \times \sqrt{3} \times (3-\sqrt{5})}{16 \times 3 \times 4\sqrt{3}}\, l_{20}^3 = \frac{5(3-\sqrt{5})}{48}\, l_{20}^3$$

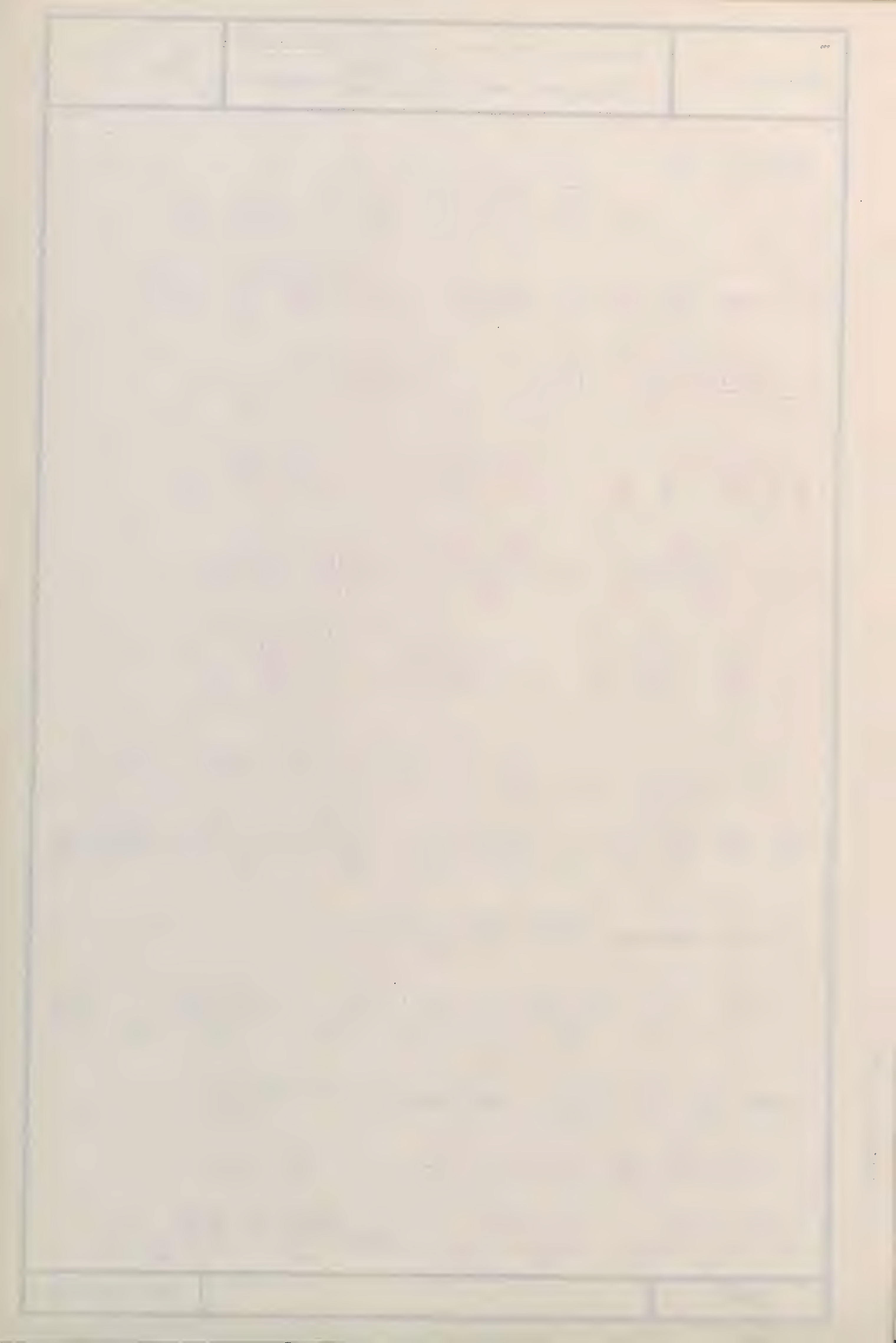
Y el volumen total del poliedro

$$V = V_{20} + V_2 = \frac{15+5\sqrt{5}}{12}\, l_{20}^3 + \frac{5(3-\sqrt{5})}{48}\, l_{20}^3 = \frac{5(5+\sqrt{5})}{16}\, l_{20}^3 \qquad [4]$$

igual al resultado anteriormente obtenido.

Desarrollo del cálculo anterior: $V = V_{20} + V_2 =$

$$= \frac{15+5\sqrt{5}}{12}\, l_{20}^3 + \frac{5(3-\sqrt{5})}{48}\, l_{20}^3 = \frac{60+20\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{48}\, l_{20}^3 =$$



$$= \frac{75 + 15\sqrt{5}}{48}\, l_{20}^{3} = \frac{25 + 5\sqrt{5}}{16}\, l_{20}^{3} = \boxed{\frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16}\, l_{20}^{3}}$$

V = Volumen en función de l_{12}

Siendo $l_{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12}$ (ver lám. 17, fórm. 194),

sustituyendo este valor en [4], tendremos:

$$V = \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16}\, l_{20}^{3} = \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12}\right)^{3} = \frac{5 \cdot (15 + 7\sqrt{5})}{16}\, l_{12}^{3}$$

Desarrollo del cálculo anterior $V = \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16} \times \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\, l_{12}\right)^{3} =$

$$= \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16} \times \frac{5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1}{8}\, l_{12}^{3} = \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16} \times \frac{16 + 8\sqrt{5}}{8}\, l_{12}^{3} =$$

$$= \frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16} \times (2+\sqrt{5})\, l_{12}^{3} = \frac{5\,(10 + 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 5)}{16}\, l_{12}^{3} = \boxed{\frac{5\,(15+7\sqrt{5})}{16}\, l_{12}^{3}}$$

Resumen de resultados

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
α			197
S	$\frac{15\,(\sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}})}{4}\, l_{20}^{2}$	$9{,}21\,97\,25\ldots\; l_{20}^{2}$	198
	$\frac{15\,(3\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})}{8}\, l_{12}^{2}$	$24{,}13\,75\,53\ldots\; l_{12}^{3}$	199
V	$\frac{5\,(5+\sqrt{5})}{16}\, l_{20}^{3}$	$2{,}26\,12\,71\ldots\; l_{20}^{3}$	200
	$\frac{5\,(15+7\sqrt{5})}{16}\, l_{12}^{3}$	$9{,}57\,88\,99\ldots\; l_{12}^{3}$	201

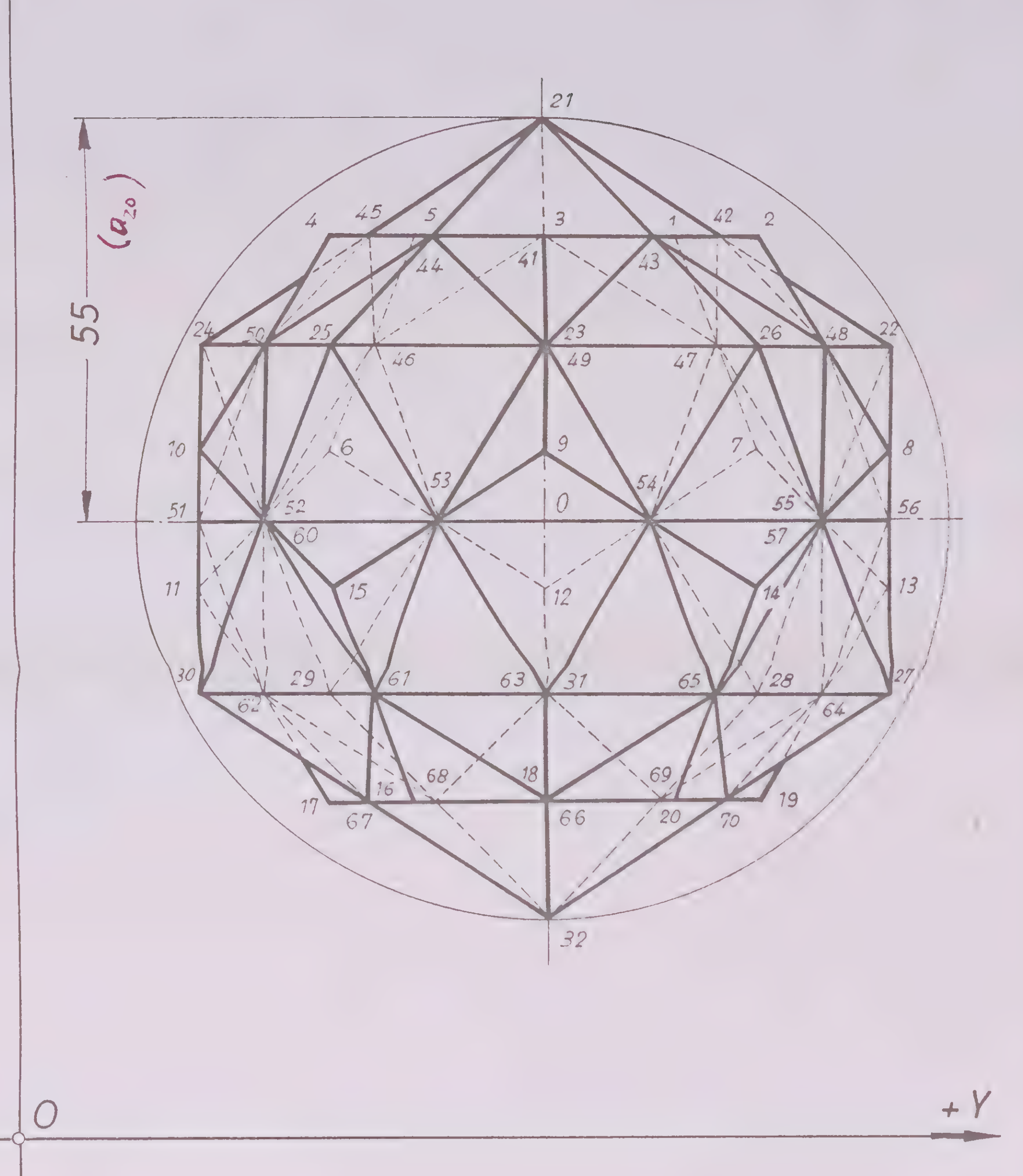
UNE A4 210 X 297



I

III

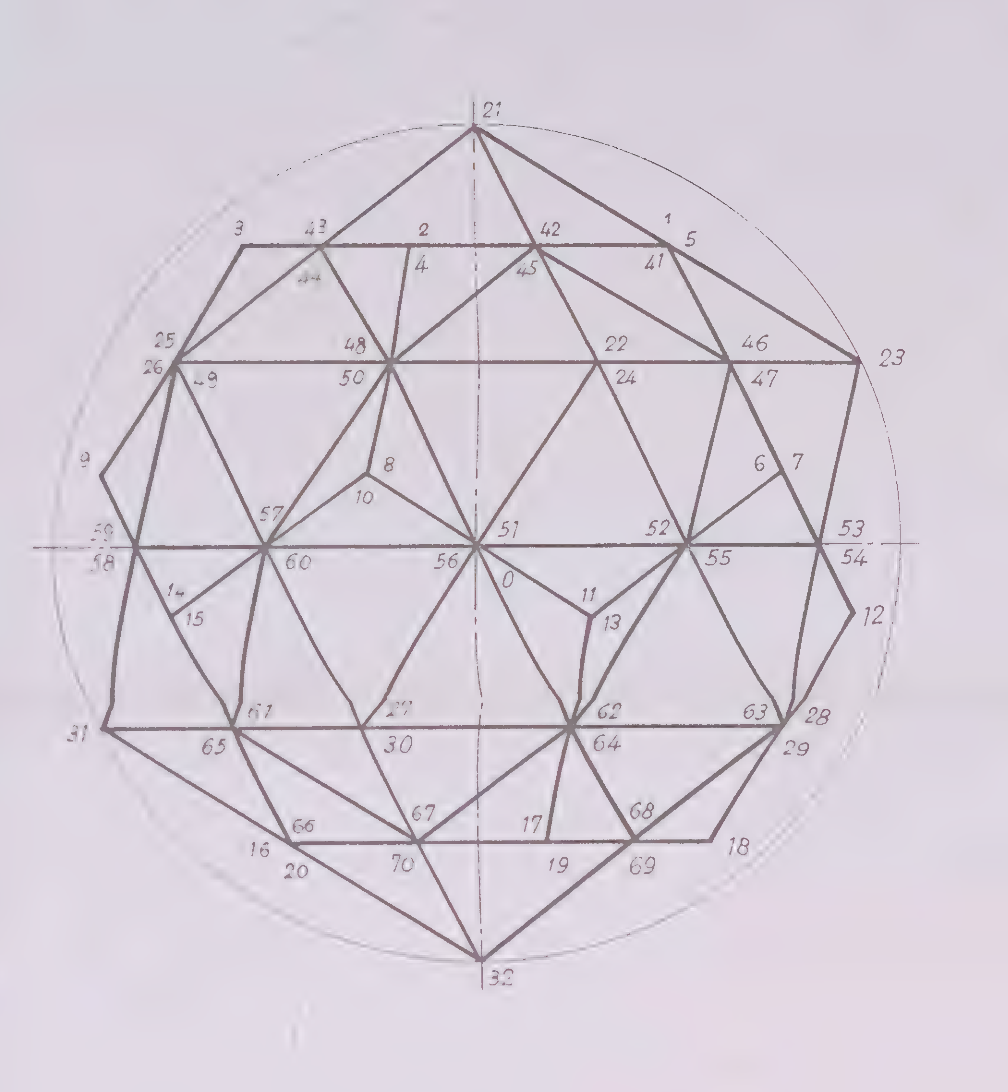
+Z



+X

O

+Y



+Y

II

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados estudiados en las láminas 16 y 17.

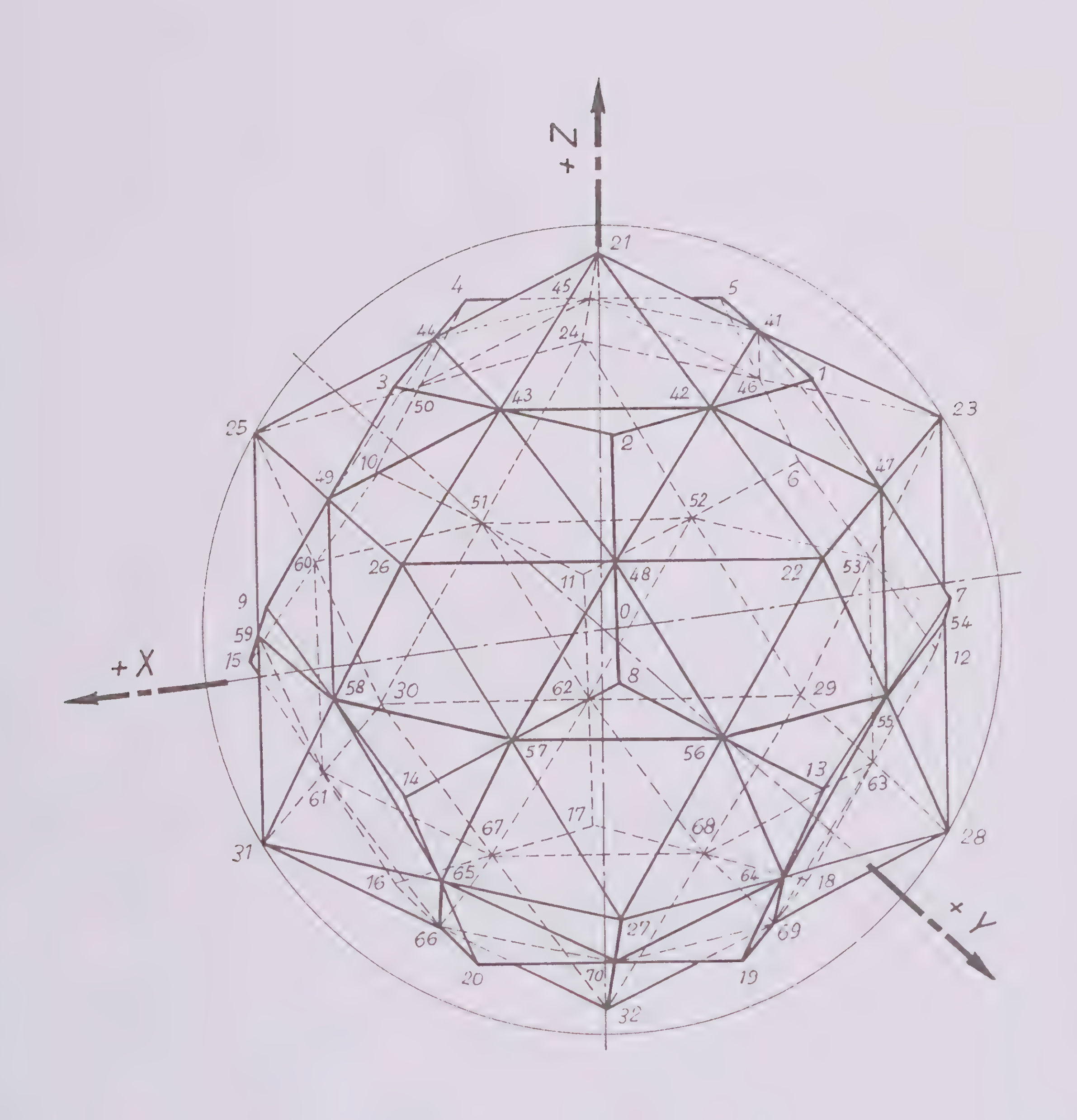
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro regular	1 al 20
Icosaedro regular	21 al 32
Núcleo (arquimediano IV)	41 al 70

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 18 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 19	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS B) Centros de aristas	19

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro que forma el núcleo (octaedro regular) o sólido común, en la intersección de los dos tetraedros regulares conjugados estudiados en la lámina 12.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1

DATOS   O (72, 72, 85) mm

l_4 = 89,8 mm

l'_4 = 89,8 mm

UNE A4 210 X 297

[illegible]		1- 5 - 72

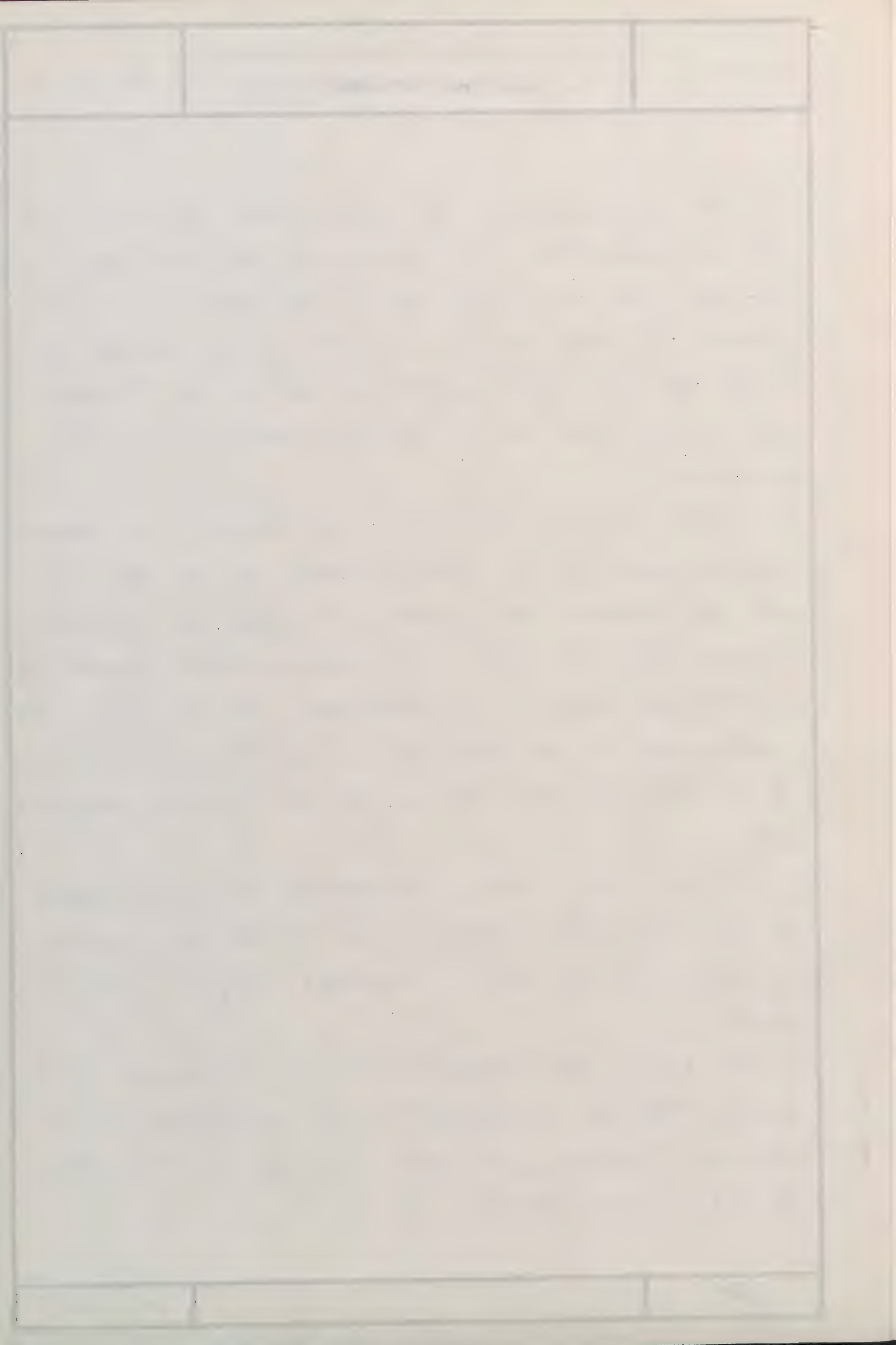


Para la representación del poliedro pedido, tomaremos como base el representado en la lámina 12, del cual suprimiremos las partes no comunes del tetraedro dado y de su conjugado. El sólido común a ambos es un octaedro regular de lado $\frac{l_4}{2}$ mitad del lado de los tetraedros, cuyos vértices están en los puntos medios de las aristas de ambos.

Como ya hemos estudiado en la lámina 3 el octaedro regular, omitimos el estudio analítico de las dimensiones del núcleo, que pueden obtenerse de inmediato aplicando los valores del cuadro sinóptico final, bien directamente previa la determinación de $l_8 = \frac{l_4}{2}$, o bien sustituyendo en las fórmulas 21 al 28 el valor de l_8 en función del lado l_4 de los tetraedros conjugados.

En este último caso, y conservando la nomenclatura de las magnitudes estudiadas en la lámina 3, damos al final de este estudio el cuadro sinóptico correspondiente.

La posición del octaedro núcleo en la lámina 19, queda alterada con respecto a la que figura en la lámina 3, teniendo en aquélla una cara paralela a II y la contigua perpendicular a I.



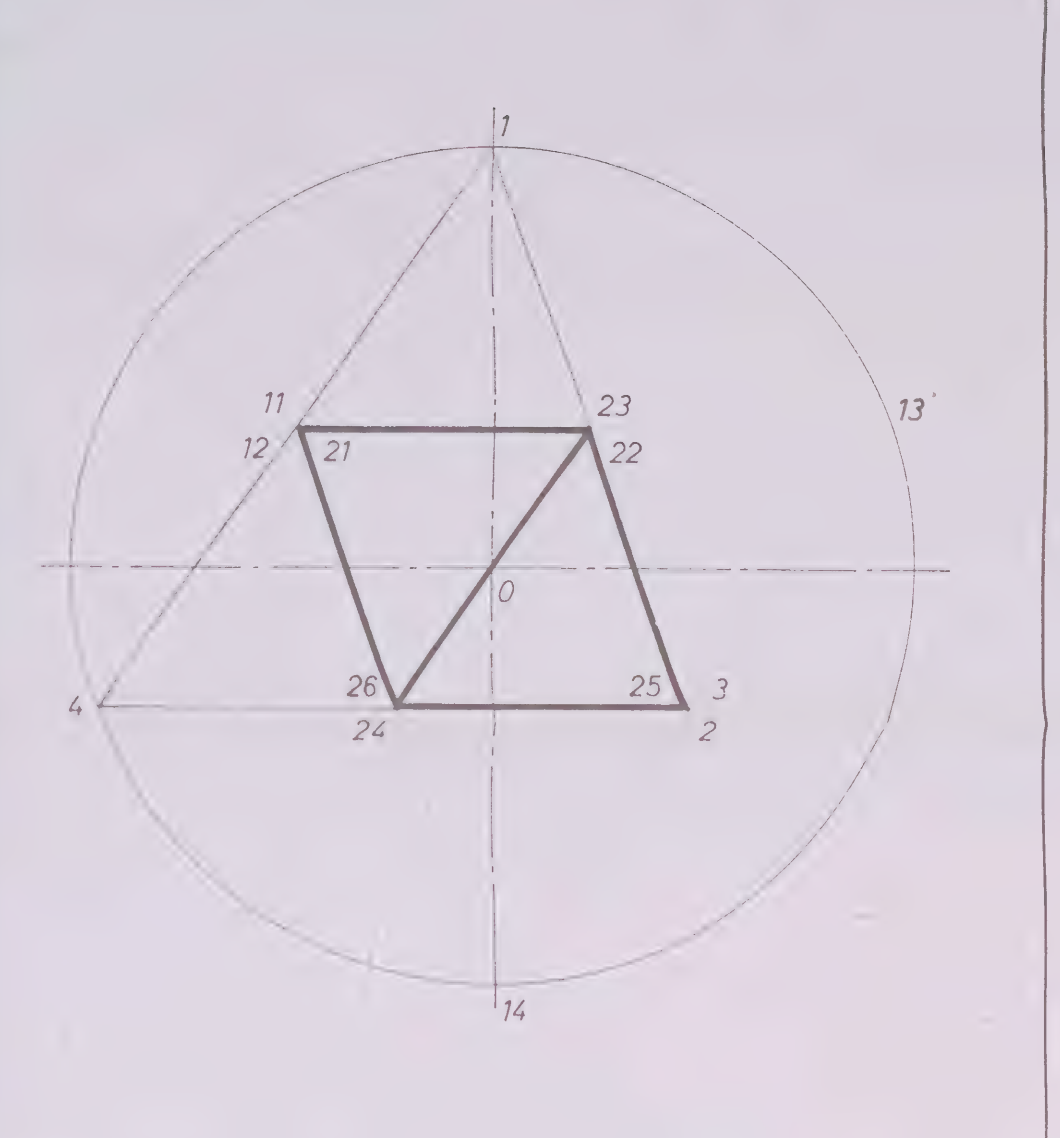
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
a_8	202 $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_4$	$0{,}35\ 35\ 53\ldots\ l_4$
b_8	203 $\frac{1}{4}\ l_4$	$0{,}25\ 00\ 00\ldots\ l_4$
c_8	204 $\frac{\sqrt{6}}{12}\ l_4$	$0{,}20\ 41\ 24\ldots\ l_4$
d_8	205 $\frac{\sqrt{3}}{6}\ l_4$	$0{,}28\ 86\ 75\ldots\ l_4$
$2\varphi_8$	206 $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	
k_8	207 $\frac{\sqrt{3}}{12}\ l_4$	$0{,}14\ 43\ 38\ldots\ l_4$
S_8	208 $\frac{\sqrt{3}}{2}\ l_4^2$	$0{,}86\ 60\ 25\ldots\ l_4^2$
V_8	209 $\frac{\sqrt{2}}{24}\ l_4^3$	$0{,}05\ 89\ 26\ldots\ l_4^3$
Relaciones entre magnitudes		
210	$d_8 = 2\,k_8$	$l_8 = 2\,b_8$

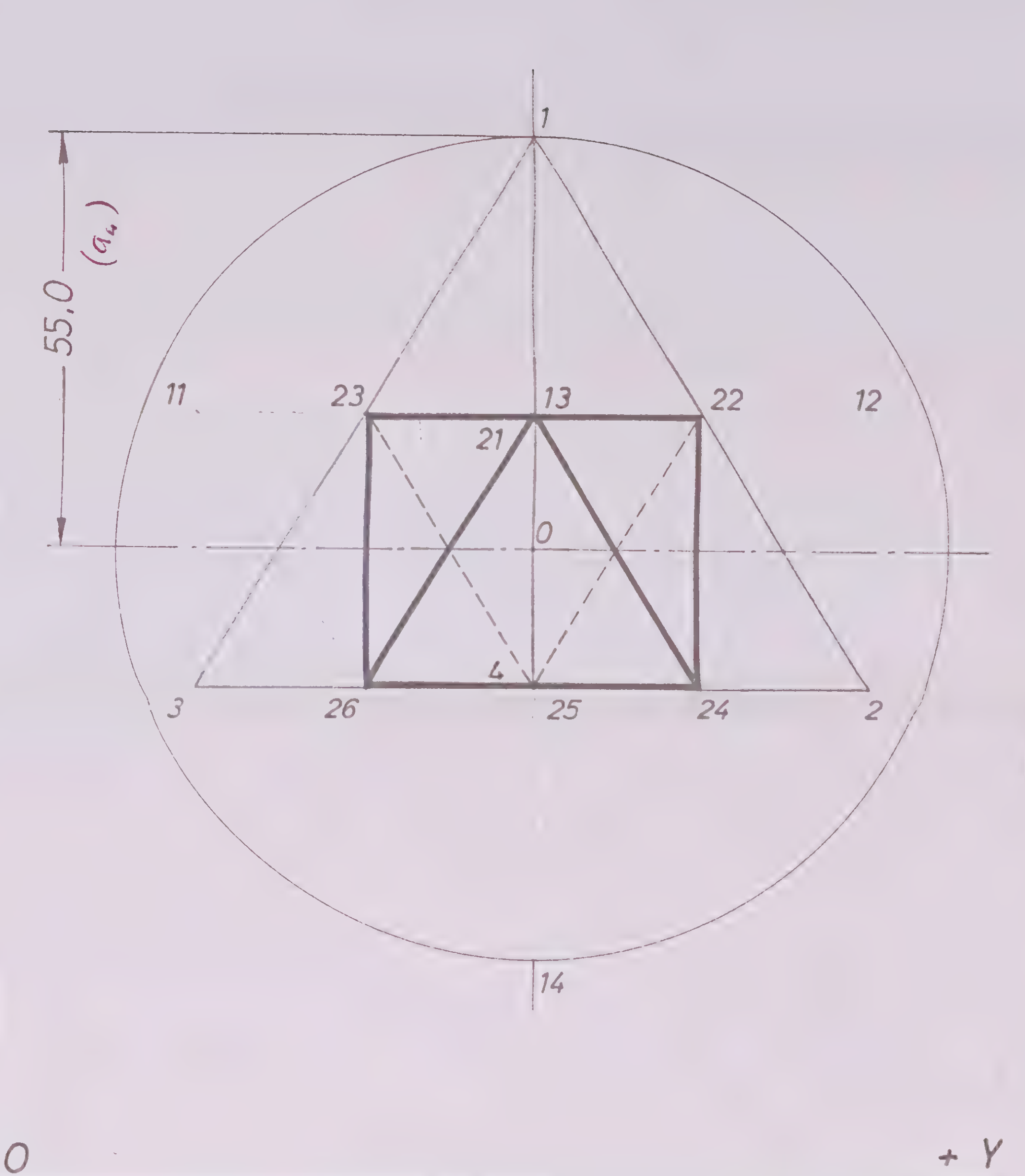
UNE A4 210 X 297



I



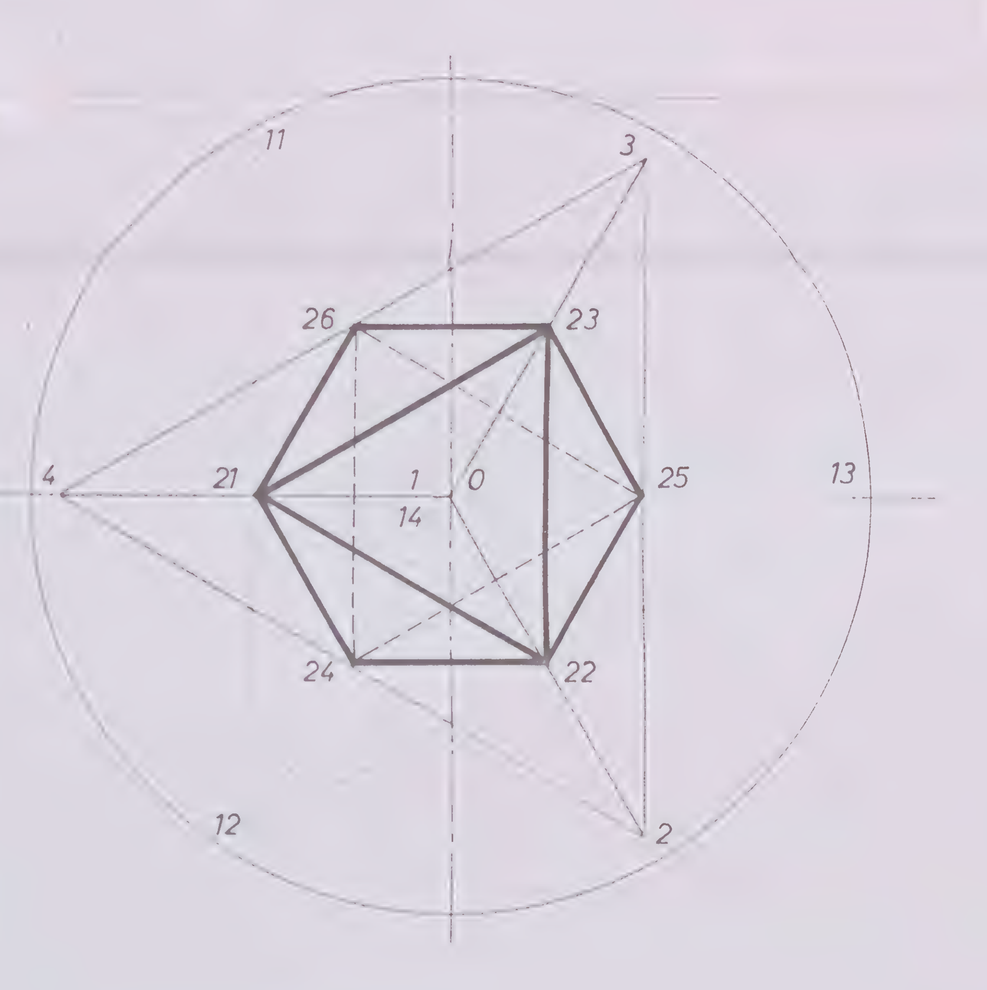
III



+ X

O

+ Y



II

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I II y III, el poliedro que forma el núcleo (octaedro regular) o sólido común en la intersección de los dos poliedros conjugados (tetraedros regulares) estudiados en la lámina 12.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

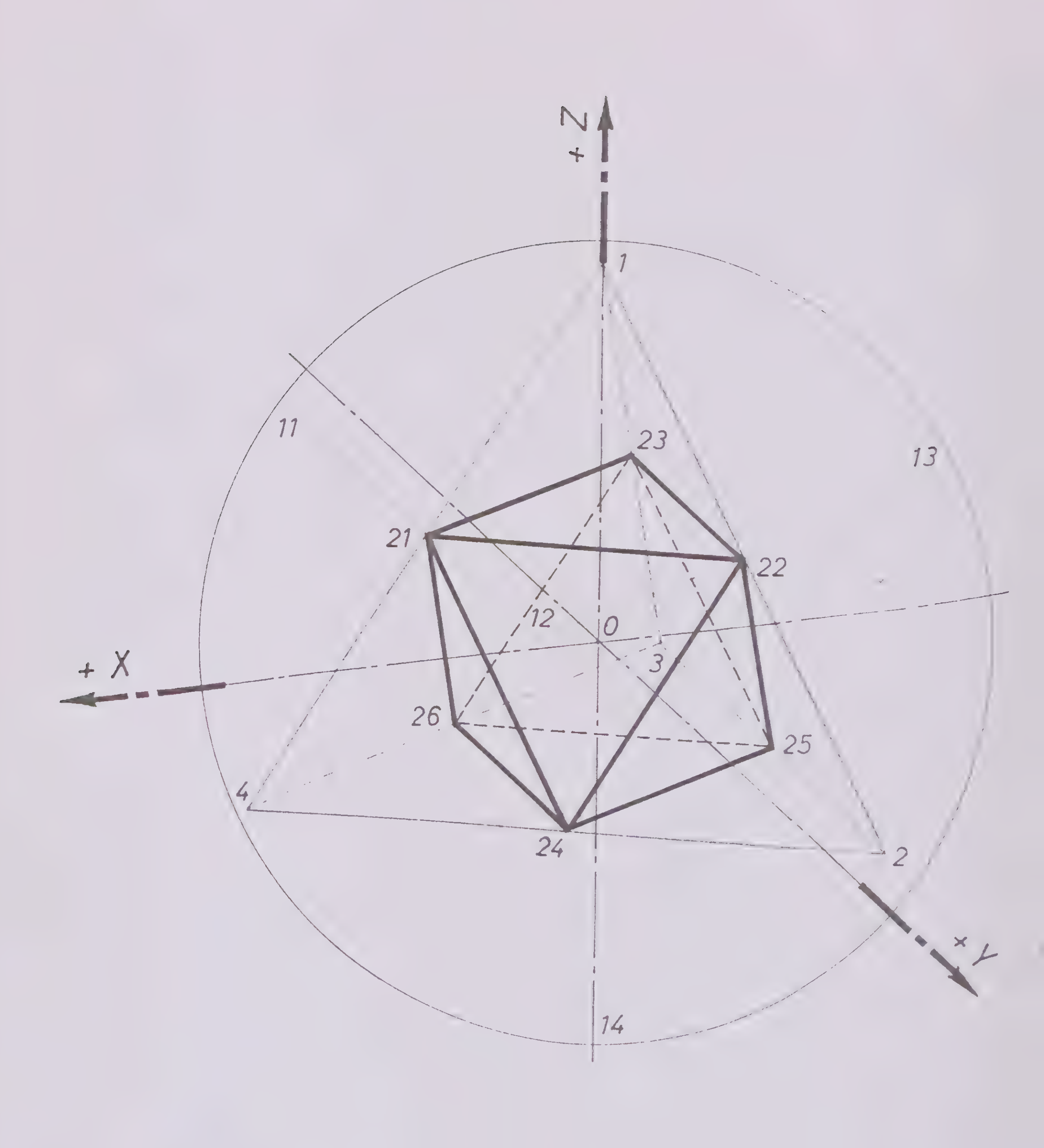
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato .... 1 al 4

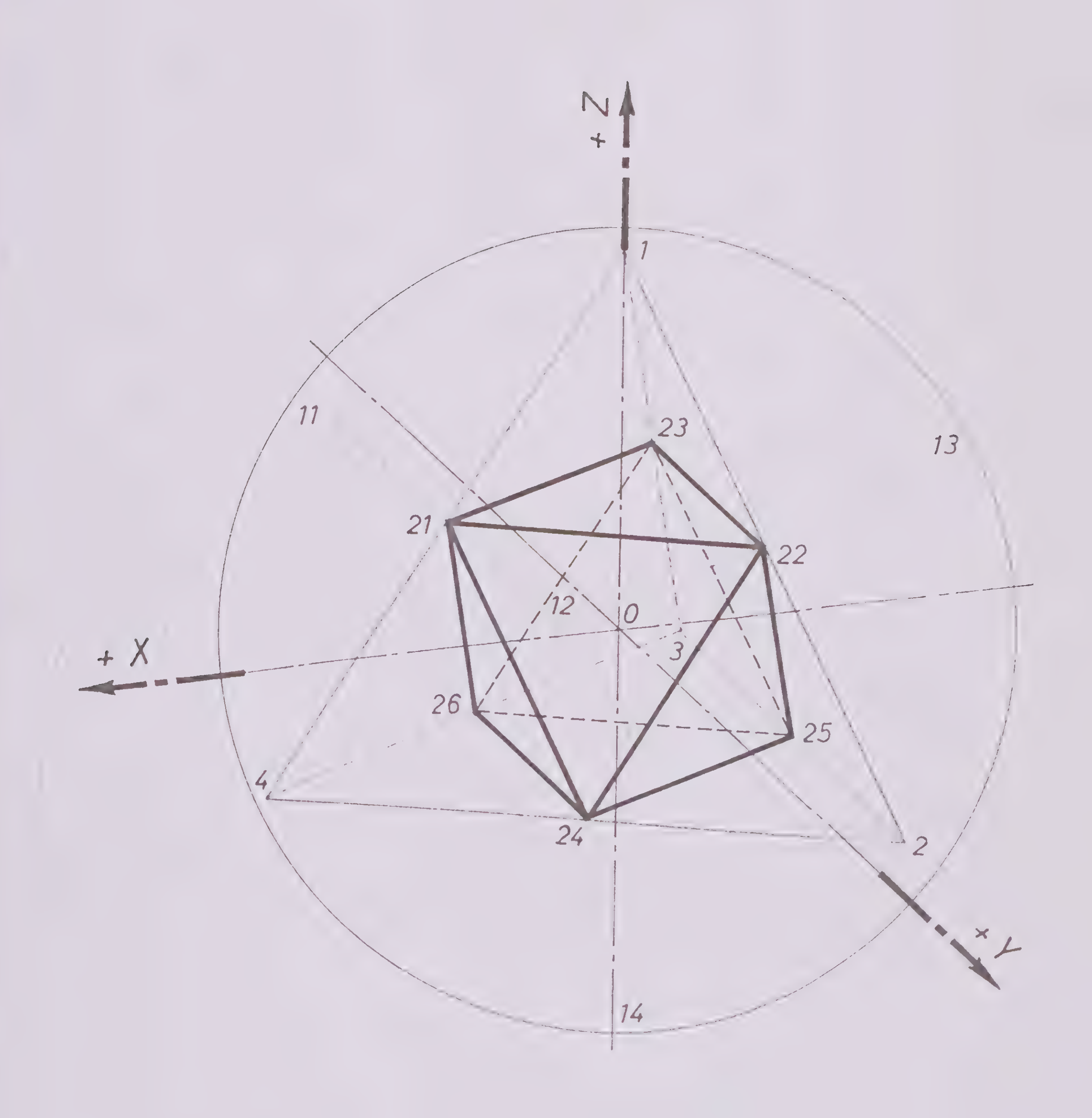
Tetraedro conjugado .... 11 al 14

Núcleo (octaedro regular) ..... 21 al 26

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 19 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 20

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS

B) Centros de aristas

20

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el poliedro que forma el núcleo (arquimediano III) o sólido común, en la intersección del exaedro y octaedro regulares conjugados estudiados en la lámina 15.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

<u>DATOS</u>

O (72, 72, 85) mm

$l_c = 55.0$ mm

$l'_8 = 77.8$ mm

UNE A4 210 X 297

3 - 5 - 72



Para la representación del poliedro pedido, tomaremos como base el representado en la lámina 15, del cual suprimiremos las partes no comunes de ambos poliedros recíprocamente conjugados.

El sólido común a ambos, es el poliedro convexo denominado "Arquimediano III" cuyo estudio detallado se ha efectuado en la lámina 35. Las aristas de este poliedro núcleo son todas iguales y el total de sus caras se compone de 8 triángulos equiláteros y 6 cuadrados. Sus ángulos poliedros (12 en total) son todos iguales, y en cada uno de ellos concurren dos caras cuadradas y dos triangulares, en forma alternada.

En el cuadro sinóptico de la mencionada lámina 35, figuran los valores analíticos de las principales magnitudes del Arquimediano III, en función de su lado "$l = l_{III}$".

Dichos valores pueden aplicarse a este ejercicio, si previamente obtenemos "l_{III}" en función de "l_8" (lado del octaedro) o de "l_6" (lado del exaedro), que independientemente pueden ser datos de esta representación.

Las relaciones correspondientes se deducen de esta lámina 20, en la que

a) En función del lado "l_8" del octaedro

$$\boxed{l_{III} = \frac{1}{2}\, l_8} = 0{,}50\,00\,00\ldots\, l_8 \quad (211) \quad [1]$$



b) En función del lado "ℓ_6" del exaedro conjugado

De la fórmula 148, lam. 14, en la que

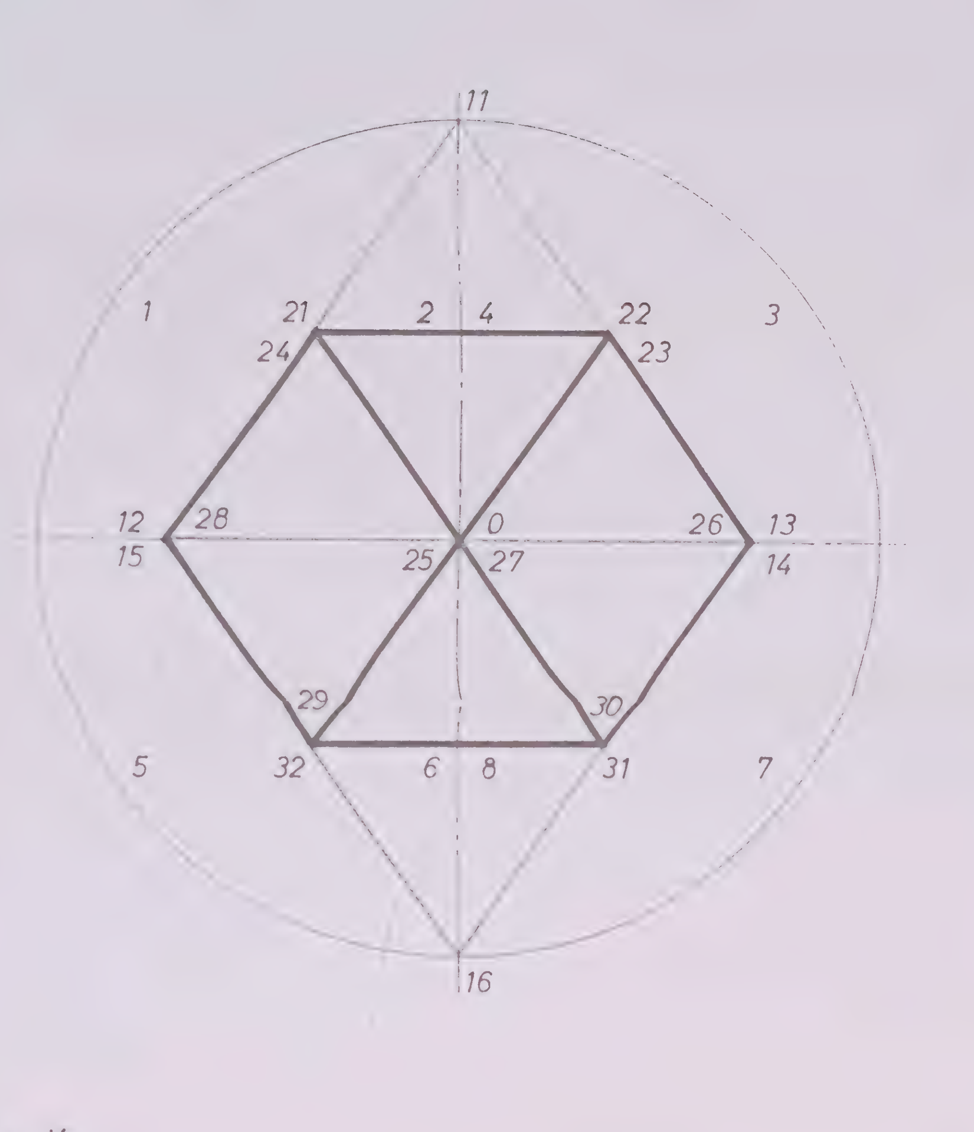
$\ell_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell_8$, se deduce $\ell_8 = \frac{2}{\sqrt{2}}\ell_6 = \sqrt{2}\ \ell_6$;

valor que sustituido en [1], nos da

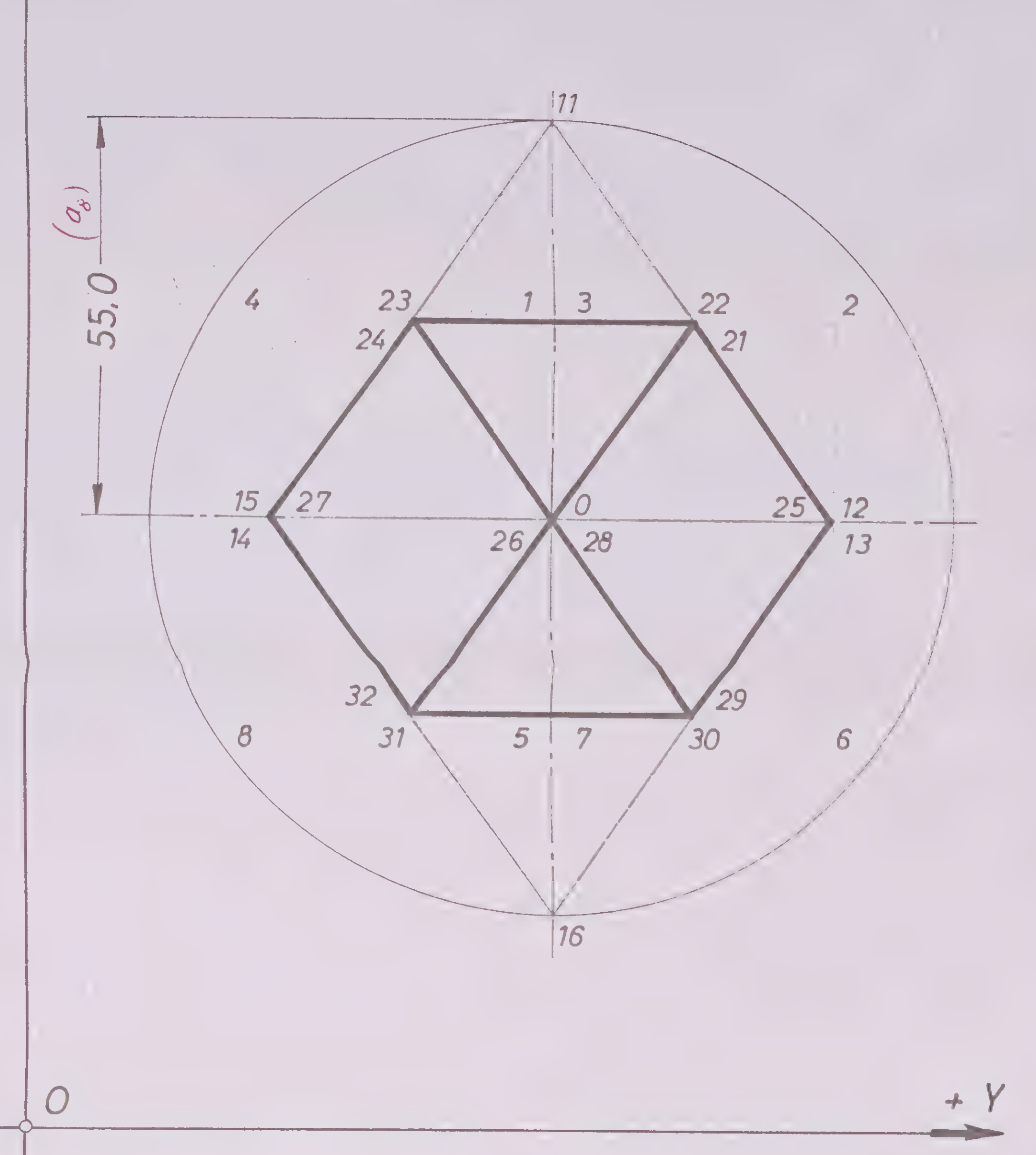
$$\boxed{\ell_{III}} = \frac{1}{2}\ell_8 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \ell_6 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\ell_6} = 0.70\ 71\ 07\ldots\ \ell_6 \quad (212)\ [2]$$



I

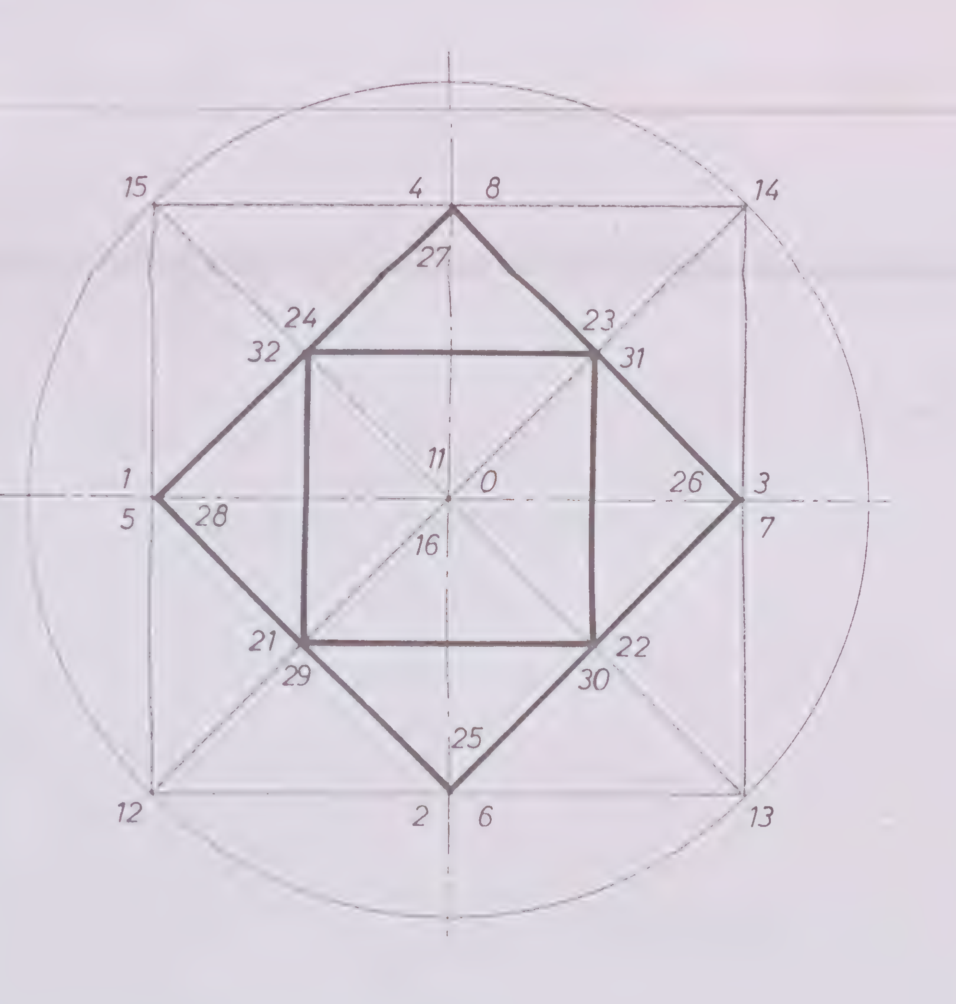


III



+ X   O   + Y

II



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro que forma el núcleo (arquimediano III) o sólido común, en la intersección del exaedro y octaedro regulares conjugados estudiados en la lámina 15.

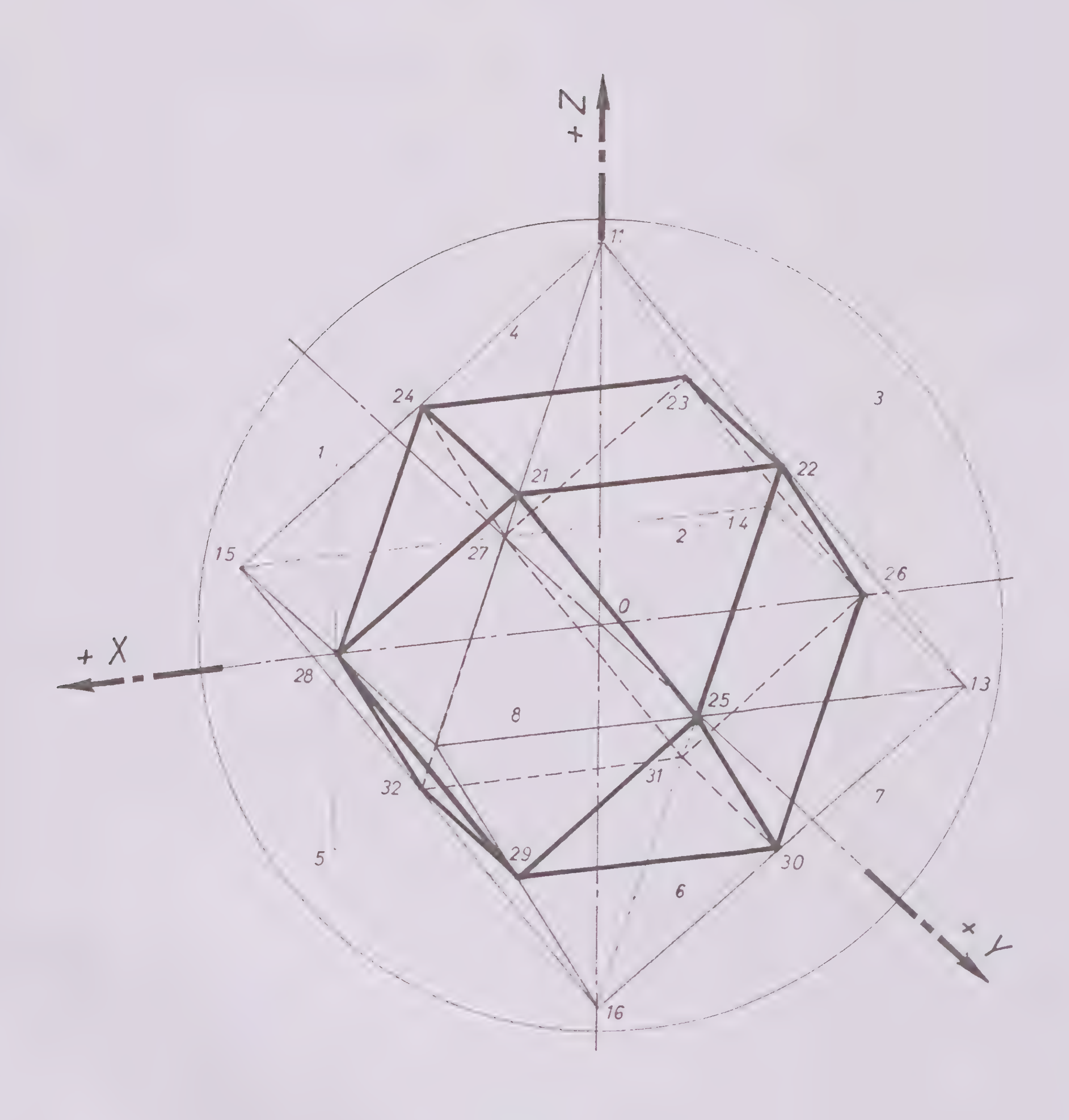
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro	1 al 8
Octaedro	11 al 16
Núcleo (arquimediano III)	21 al 32

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1 : 1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 20 — Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 21	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS B) Centros de aristas	21

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro que forma el núcleo (arquimediano IV) o sólido común, en la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares conjugados estudiados en la lámina 18.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS

O (72, 72, 85) mm

l_{12} = 35,7 mm

l'_{20} = 57,7 mm

3 - 5 - 72



Para la representación del poliedro pedido, tomaremos como base el representado en la lámina 18, del cual suprimiremos las partes no comunes de ambos poliedros recíprocamente conjugados.

El sólido común a ambos es el poliedro convexo denominado "Arquimediano IV" cuyo estudio detallado se ha efectuado en la lámina 36. Las aristas de este poliedro núcleo son todas iguales y el total de sus caras se compone de 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros de lados de igual longitud en ambos polígonos. Sus ángulos poliedros (30 en total) son todos iguales y en cada uno de ellos concurren dos caras pentagonales y dos triangulares en forma alternada.

En los dos cuadros sinópticos de la mencionada lámina 36, figuran los valores analíticos de las principales magnitudes del Arquimediano IV, en función de su lado "$l = l_{IV}$".

Dichos valores pueden aplicarse a este ejercicio, si previamente obtenemos "l_{IV}" en función "l_{20}" (lado del icosaedro) o de "l_{12}" (lado del dodecaedro), que independientemente pueden ser datos de esta representación.

Las relaciones correspondientes se deducen de esta lámina 21, en la que



a) En función del lado "l_{20}" del icosaedro

$$\boxed{l_{IV} = \frac{1}{2}\, l_{20}} = 0{,}50\ 00\ 00 \ldots\, l_{20} \qquad (213) \qquad [1]$$

b) En función del lado "l_{12}" del dodecaedro conjugado

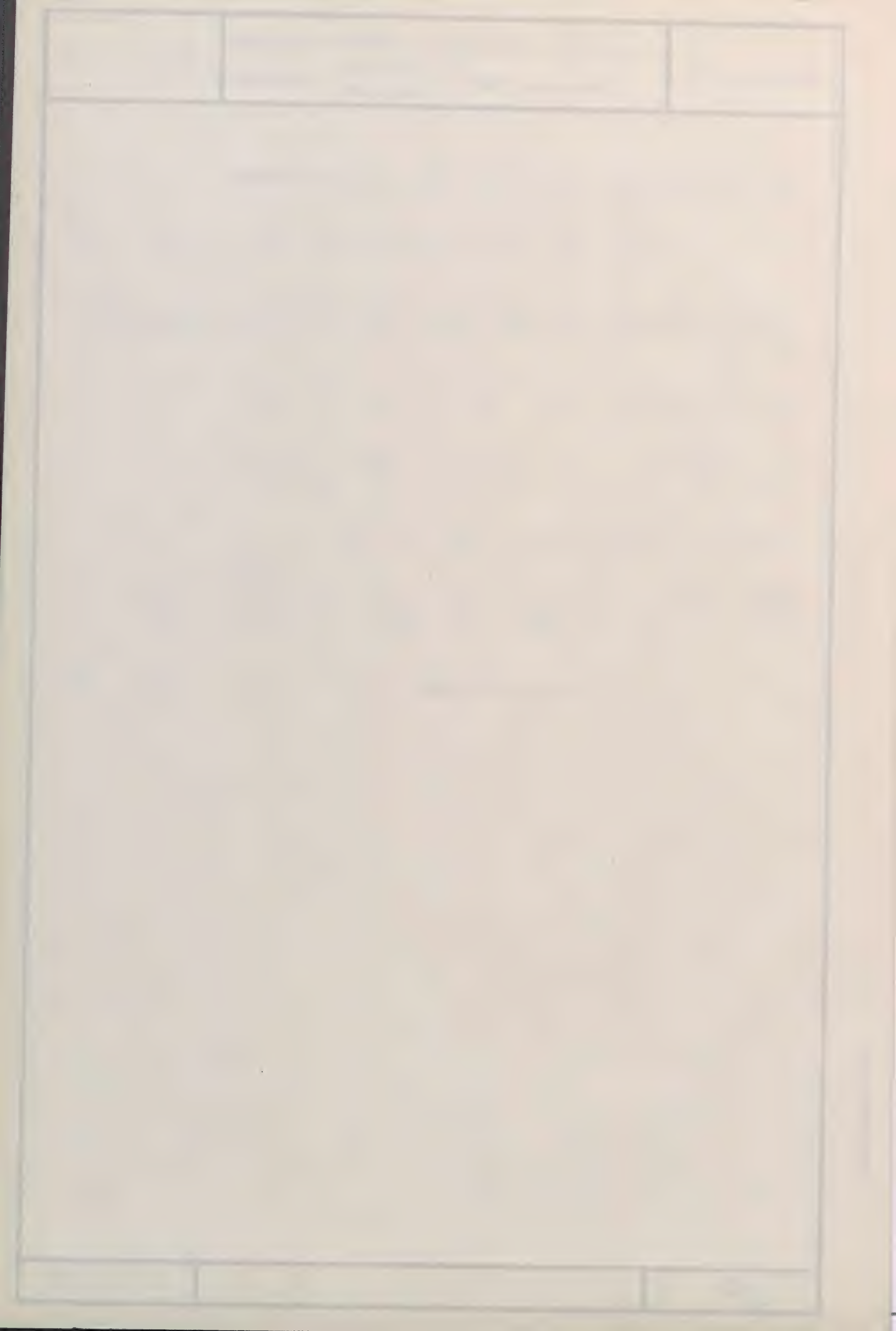
De la fórmula 181, lám 17, en la que

$$l_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, l_{20}\,, \quad \text{se deduce} \quad l_{20} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\, l_{12}\,;$$

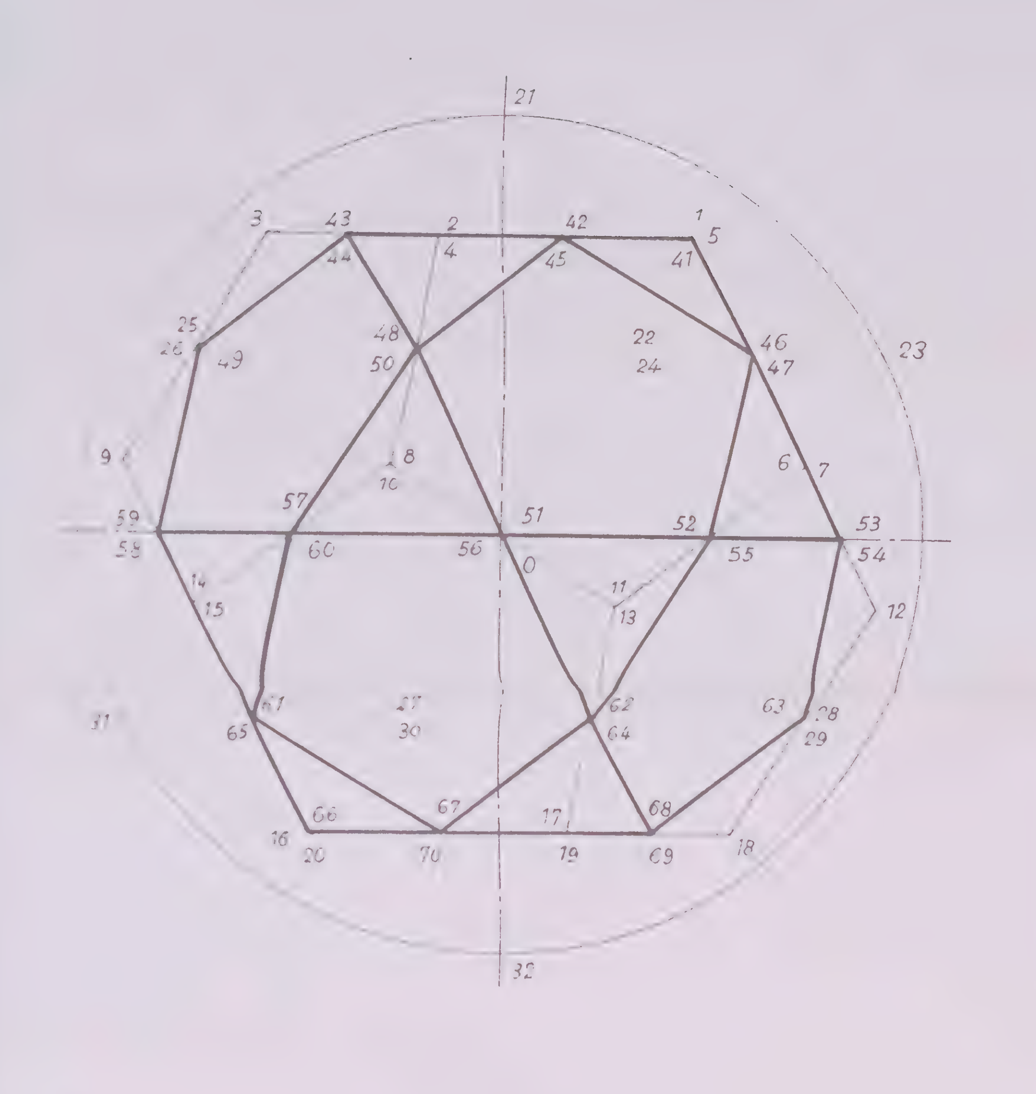
valor que sustituido en [1], nos da

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{1}{2}\, l_{20} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}-1}\, l_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}\, l_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{4}\, l_{12}} =$$

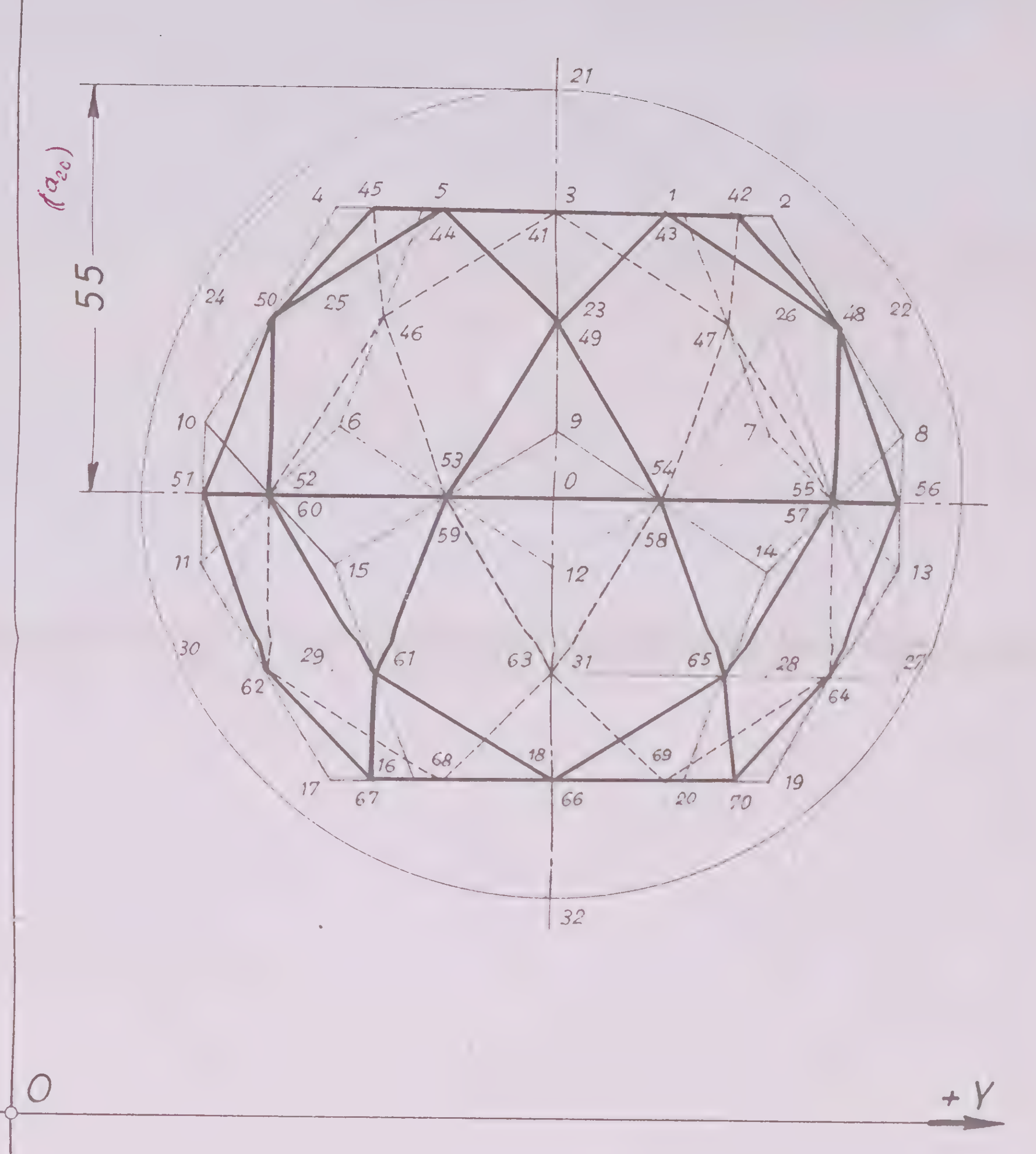
$$= 0{,}80\ 90\ 17\ 00 \ldots\, l_{12} \qquad (214) \qquad [2]$$



I



III



+Z

+X

O

+Y

II

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el poliedro que forma el núcleo (arquimediano IV) o sólido común, en la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares conjugados estudiados en la lámina 18.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro regular............ 1 al 20

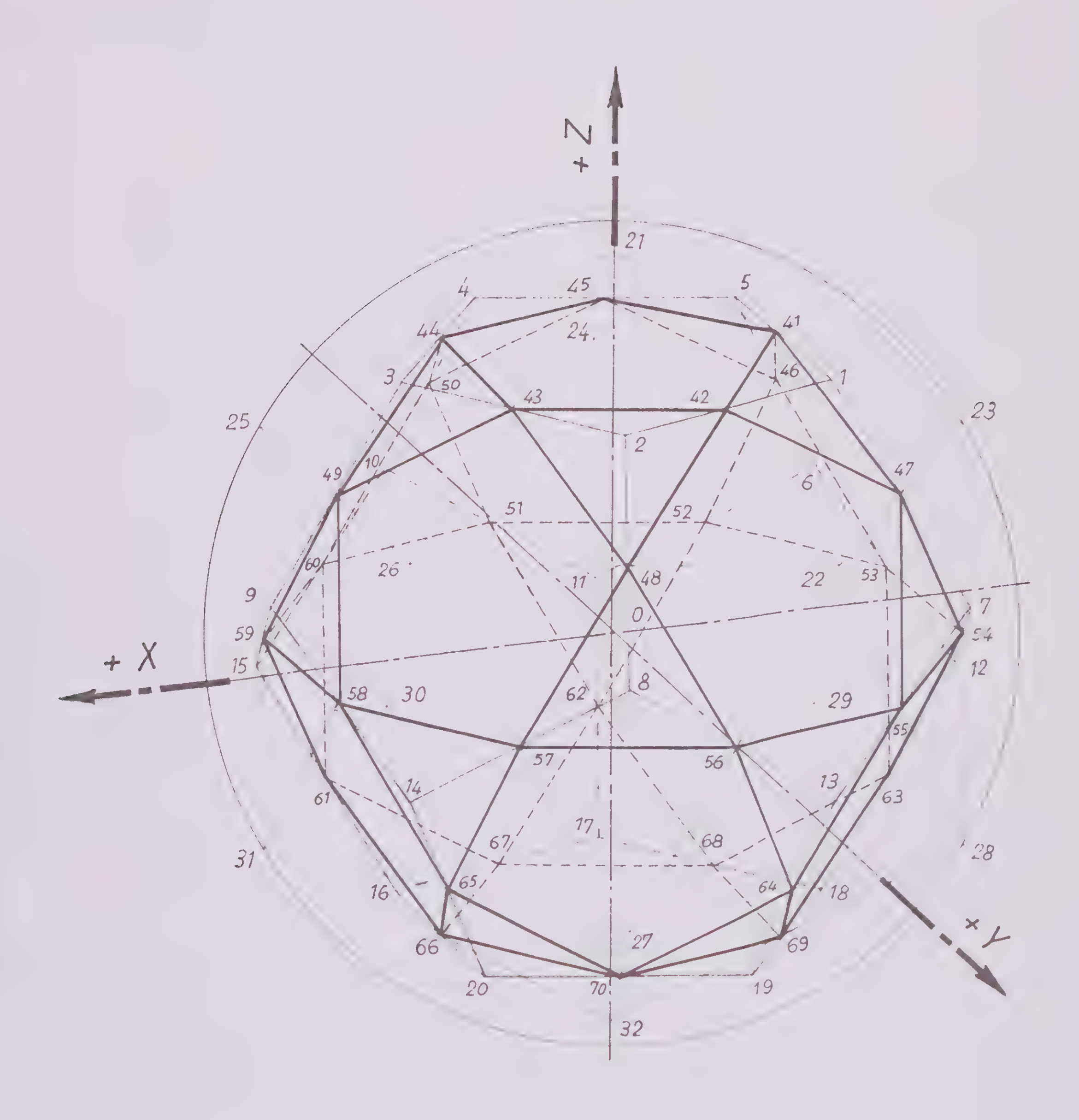
Icosaedro regular............ 21 al 32

Núcleo (arquimediano IV)..... 41 al 70

+Y

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:1	*Poliedros regulares convexos conjugados*	Lámina 21 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 22	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS c) De igual esfera circunscrita	22

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-numérico, en los planos I, II y III, el poliedro resultante de la intersección de dos tetraedros regulares recíprocamente conjugados y de esfera circunscrita común, siendo los vértices de cada uno de ellos las proyecciones desde el centro de dicha esfera, y sobre ésta, de los centros de las caras del otro.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 75) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

$a_4 = a'_4 = 55$ mm

UNE A4 210 X 297

		11 - 5 - 72



CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 6 a 10 hemos estudiado los poliedros regulares conjugados de los cinco poliedros regulares, obtenidos aquéllos al unir los centros de dos caras contiguas de éstos.

En la lámina 11 indicamos la posibilidad de deducir los poliedros conjugados de los regulares, por otros procesos geométricos distintos del anterior. El proceso seguido en el desarrollo de las láminas 11, 13, 14, 16 y 17, ha sido el de trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro del poliedro dado.

El nuevo proceso que seguiremos en el desarrollo de las láminas 22, 23 y 24 consistirá en considerar la esfera circunscrita al poliedro regular P dado y la de su conjugado P', de igual radio y centro (coincidentes). En este supuesto, los vértices del conjugado P' se obtienen proyectando los centros de cada cara de P, sobre la esfera común y desde el centro de ésta.

El poliedro conjugado de un tetraedro regular P_4, ya sabemos que es otro tetraedro P'_4 también regular. Por tener ambos poliedros la esfera circunscrita común, dichos poliedros serán pues iguales



Como esta propiedad ha sido deducida en la lámina 11 al considerar una distinta forma de obtención del tetraedro conjugado de otro dado, llegamos a la conclusión de que el estudio realizado en la mencionada lámina 11, y la represpresentación conjunta del poliedro resultante en la lámina 12, es aplicable al caso que nos ocupa.

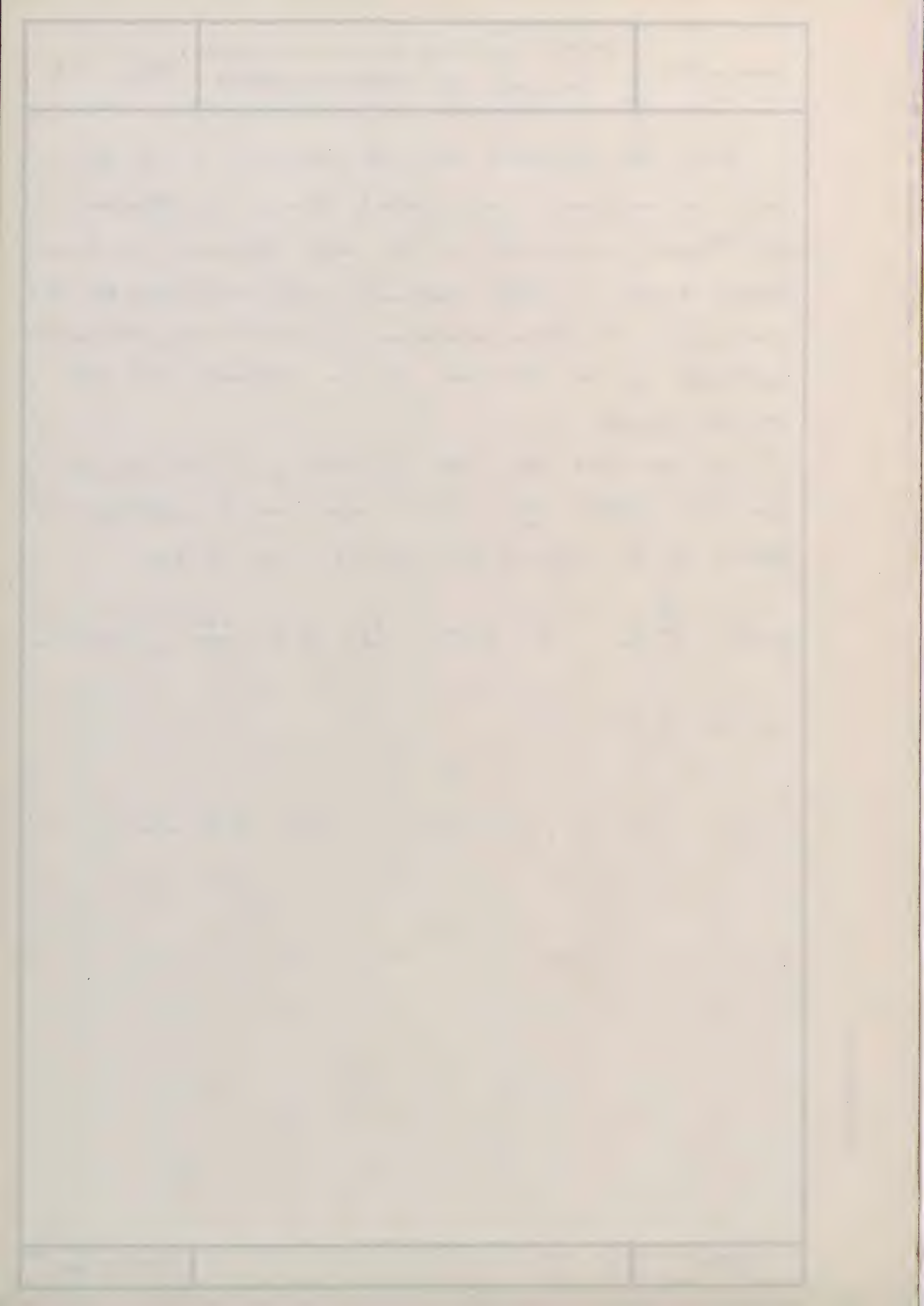
La magnitud del lado l'_4 del conjugado, en función del radio $\underline{a_4}$ común para ambos poliedros, se deduce de la fórmula 126, lám. 11, en la que

$$a_4 = a'_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l'_4 \quad \text{de donde} \quad l'_4 = \frac{4}{\sqrt{6}}\, a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}\, a_4 = (215)\,[\,1\,]$$

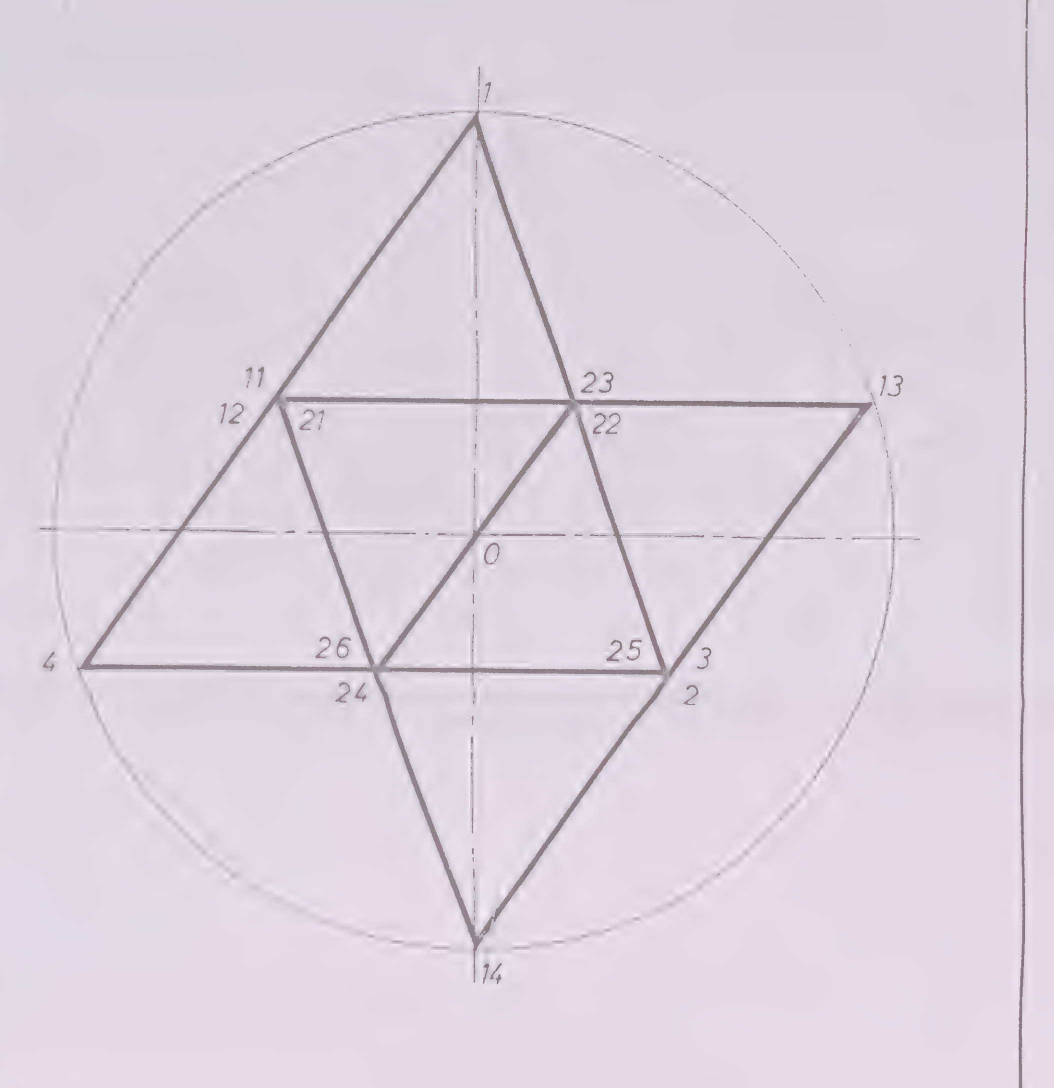
$$= 1,63\,29\,93 \ldots\, a_4$$

$$l'_4 = 1,63\,29\,93 \ldots \times 55 = 89.8 \text{ mm.}$$

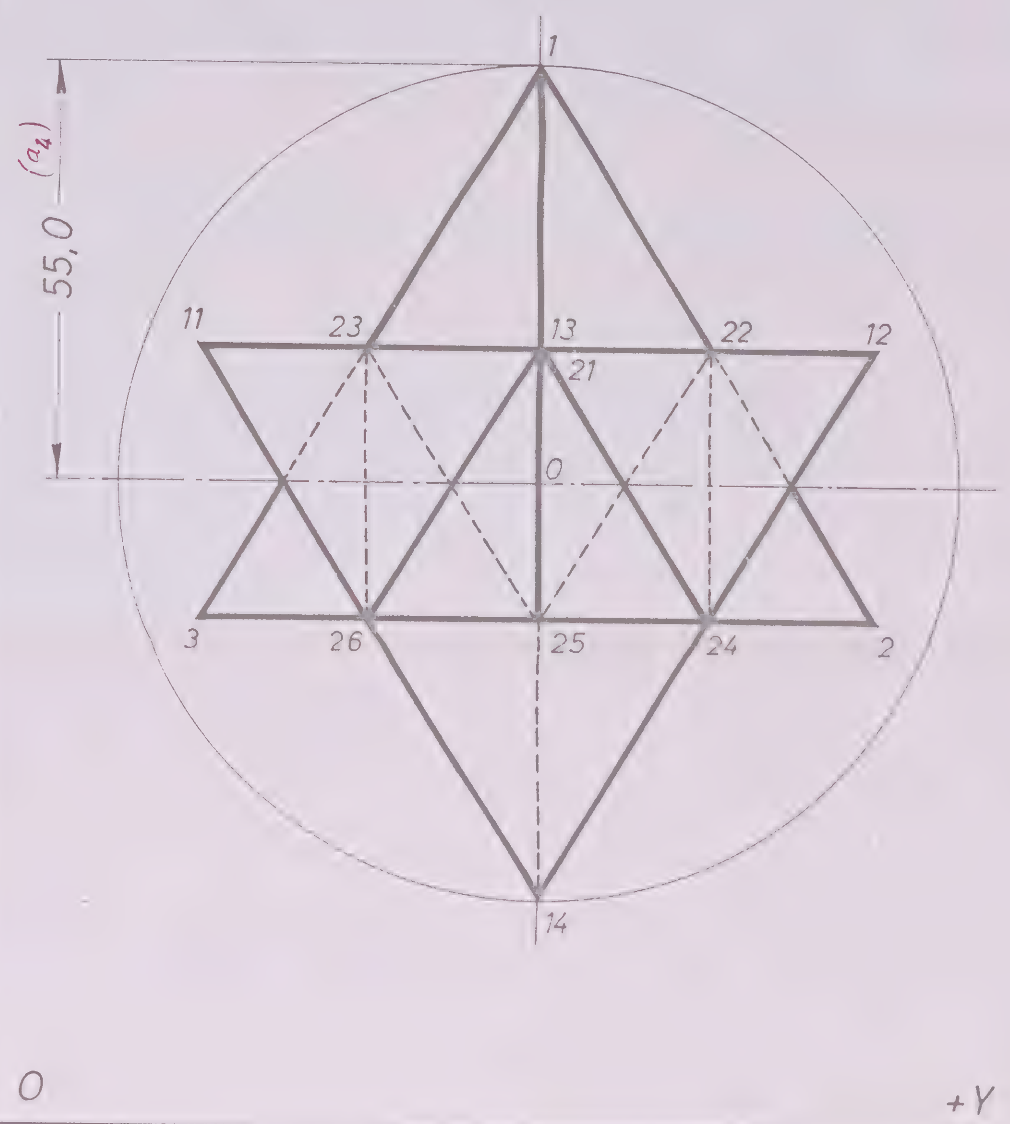
UNE A4 210 X 297



I



III

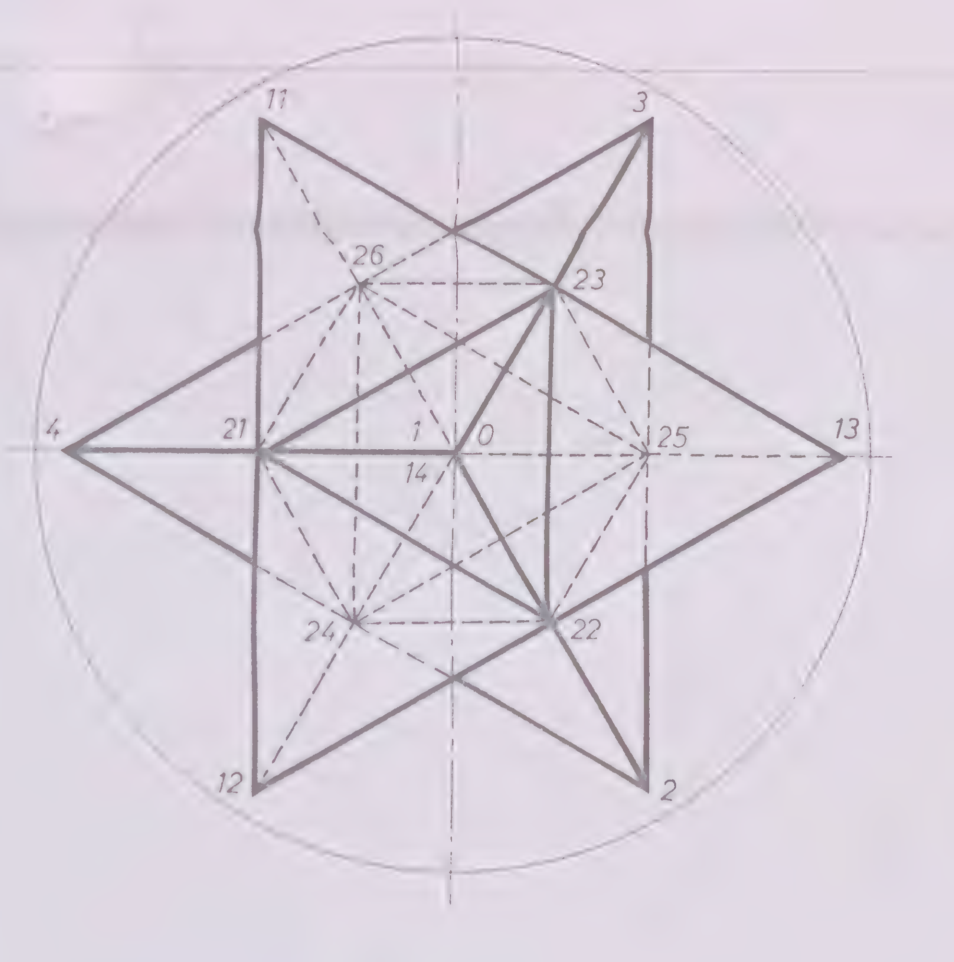


+Z

+X

O

+Y



ENUNCIADO.

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

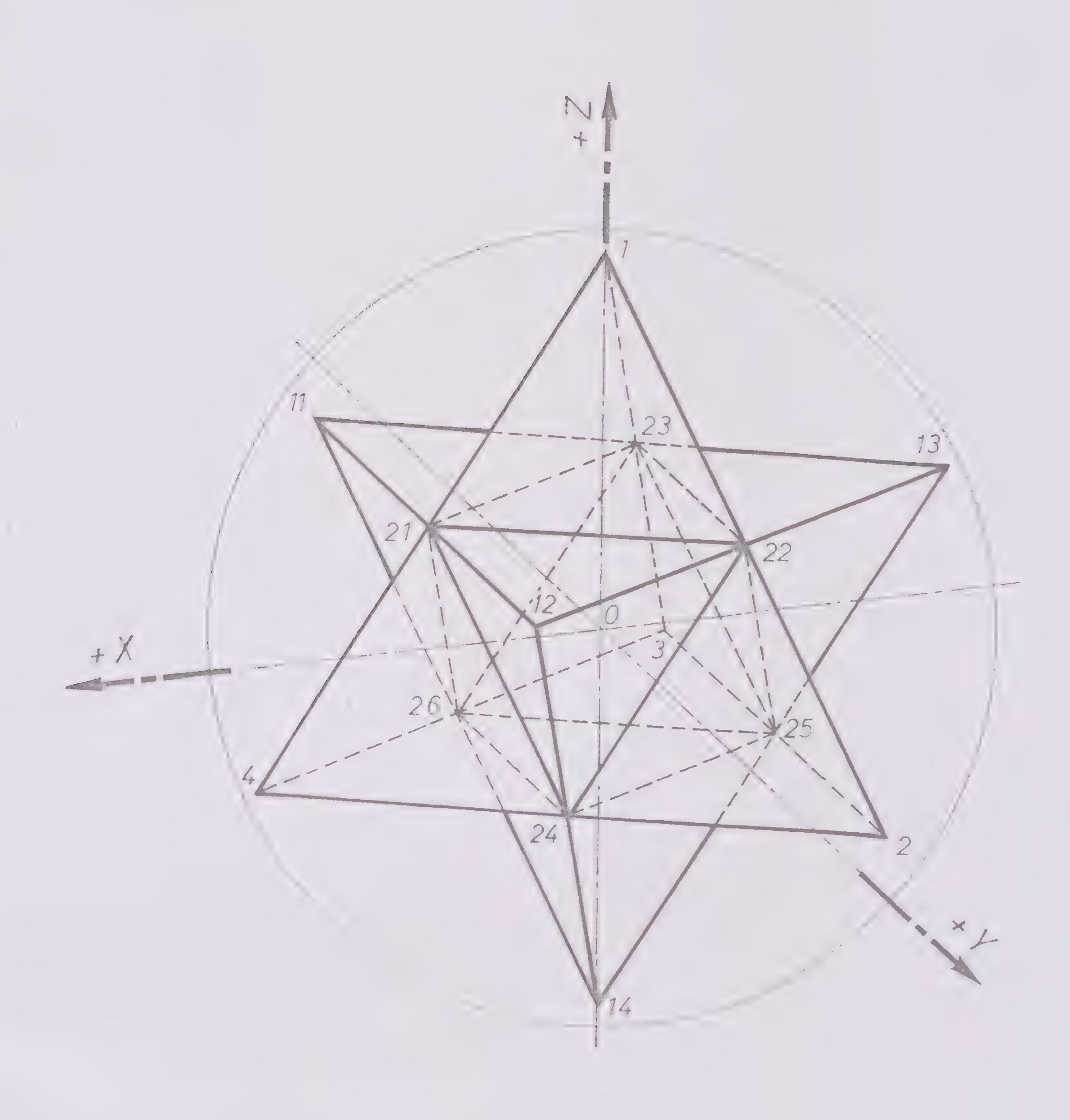
Tetraedro dato	1 al 4
Tetraedro conjugado	11 al 14
Núcleo (octaedro regular)	21 al 26

+Y

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina ~~12~~ 22 Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lamina 23	POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS c) De igual esfera circunscrita.	23

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro resultante de la intersección de un exaedro y octaedro regulares recíprocamente conjugados y de esfera circunscrita común, siendo los vértices de cada uno de ellos las proyecciones desde el centro de dicha esfera, y sobre ésta, de los centros de las caras del otro.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS: O (72, 72, 85) m m

$a_6 = a_8 = 55$ m m.

UNE A4 210 X 297

		14 - 5 - 72



CONSIDERACIONES PREVIAS

Al iniciar en la lámina 6 el estudio y propiedades de los poliedros conjugados de los regulares, vimos que estos conjugados son también regulares, correspondiendo al tetraedro otro tetraedro; al exaedro el octaedro; al octaedro el exaedro; al dodecaedro el icosaedro y al icosaedro el dodecaedro.

Con ello llegamos a la conclusión de que el exaedro y octaedro son mutuamente conjugados (cada uno lo es del otro), así como igual ocurre con el dodecaedro e icosaedro. El tetraedro regular es conjugado de sí mismo.

De lo anteriormente expuesto se deduce que al estudiar el conjugado de un poliedro dado, obtenido según un proceso geométrico determinado, conocemos de antemano la forma constante de dicho conjugado, y en general variable con respecto a sus dimensiones, dependientes del proceso de obtención aplicado.

Ello ha quedado de manifiesto en el estudio de las láminas 6 a 10 y 11-13-14-16-17. Los procesos geométricos de generación aplicados, conforman esta variabilidad, excepción hecha del conjugado del tetraedro en la lámina 11, cuya ley de formación da lugar a un conjugado de igual magnitud que el dado.



El proceso seguido en el estudio de los poliedros conjugados desarrollados en las láminas 22, 23 y 24, de esfera circunscrita común, reproduce en la lámina 22 la representación de las láminas 11 y 12. En las láminas 23 y 24, el poliedro resultante de la mutua intersección del poliedro dado y de su conjugado de igual esfera circunscrita, es el mismo e independiente del que se tome como dato.

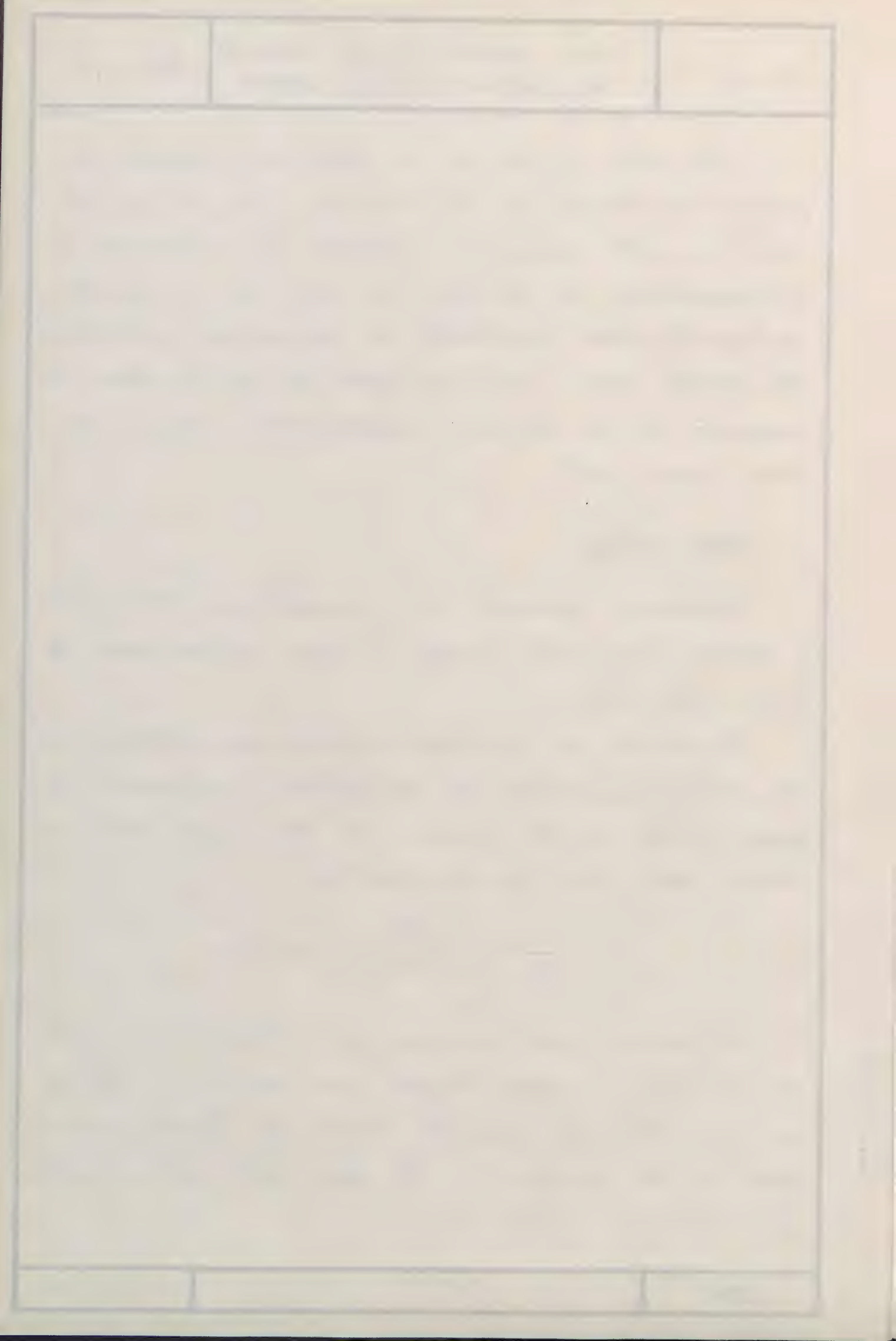
PROCESO GRÁFICO

Procederemos previamente a la representación del exaedro y octaedro conjugados, inscritos en una misma esfera de 55 mm. de radio.

Comencemos por el octaedro regular, que colocaremos en la posición representada en la lámina 3, siguiendo el proceso gráfico de la misma. El lado l_8 de este octaedro, será (ver lám. 3, fórm. 21)

$$l_8 = \frac{a_8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{55}{0.70\ 71\ 07} = 77,8 \text{ mm}$$

El exaedro regular conjugado del anterior e inscrito en su misma esfera, tendrá una posición en relación con el octaedro ya dibujado, exactamente igual al que tiene en la lámina 2. El lado l_6 de este exaedro, será (ver lám. 2, fórm. 11)



$$l_6 = \frac{a_6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{55}{0.86\ 60\ 25} = 63,5 \text{ mm.}$$

Planteado el problema de intersección de ambos poliedros, se puede obtener el resultado por aplicación del método de intersección de caras o de aristas cuyo fundamento se estudia en la Geometría Descriptiva.

Esta intersección se reduce a la penetración de los ángulos sólidos del octaedro en las caras del exaedro que, por razones de simetría en la posición relativa de ambos poliedros, son todas iguales y cuadradas. Dibujando las proyecciones de los dos poliedros en los planos I y II, es inmediata la obtención de la mutua intersección en ambos planos de las cuales se deduce muy fácilmente la proyección en III (igual a la I).

El sólido resultante se compone básicamente de un exaedro regular en cuyas caras, y centradas con ellas, se apoyan seis pirámides rectas de base cuadrada todas iguales. Las diagonales de las bases de estas pirámides son perpendiculares (o paralelas) a los lados del cuadrado de cada cara del exaedro.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para facilitar el dibujo y exactitud en el trazado, calcularemos las siguientes magnitudes en función del radio <u>a</u> de la esfera circunscrita común:



l_6 = Lado del exaedro

l_8 = Lado del octaedro

f = Lado del cuadrado intersección de un ángulo sólido del octaedro con una cara del exaedro.

g = Diagonal del cuadrado anterior

h = Altura de la pirámide exterior a una cara del exaedro

S = Superficie lateral

V = Volumen.

2θ = Angulo rectilíneo del diedro formado por la intersección de una cara del exaedro con la correspondiente del octaedro

Lado "l_6" del exaedro

Ya lo hemos determinado anteriormente; (su valor se deduce de la fórmula 11, lám. 2).

$$l_6 = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a$$

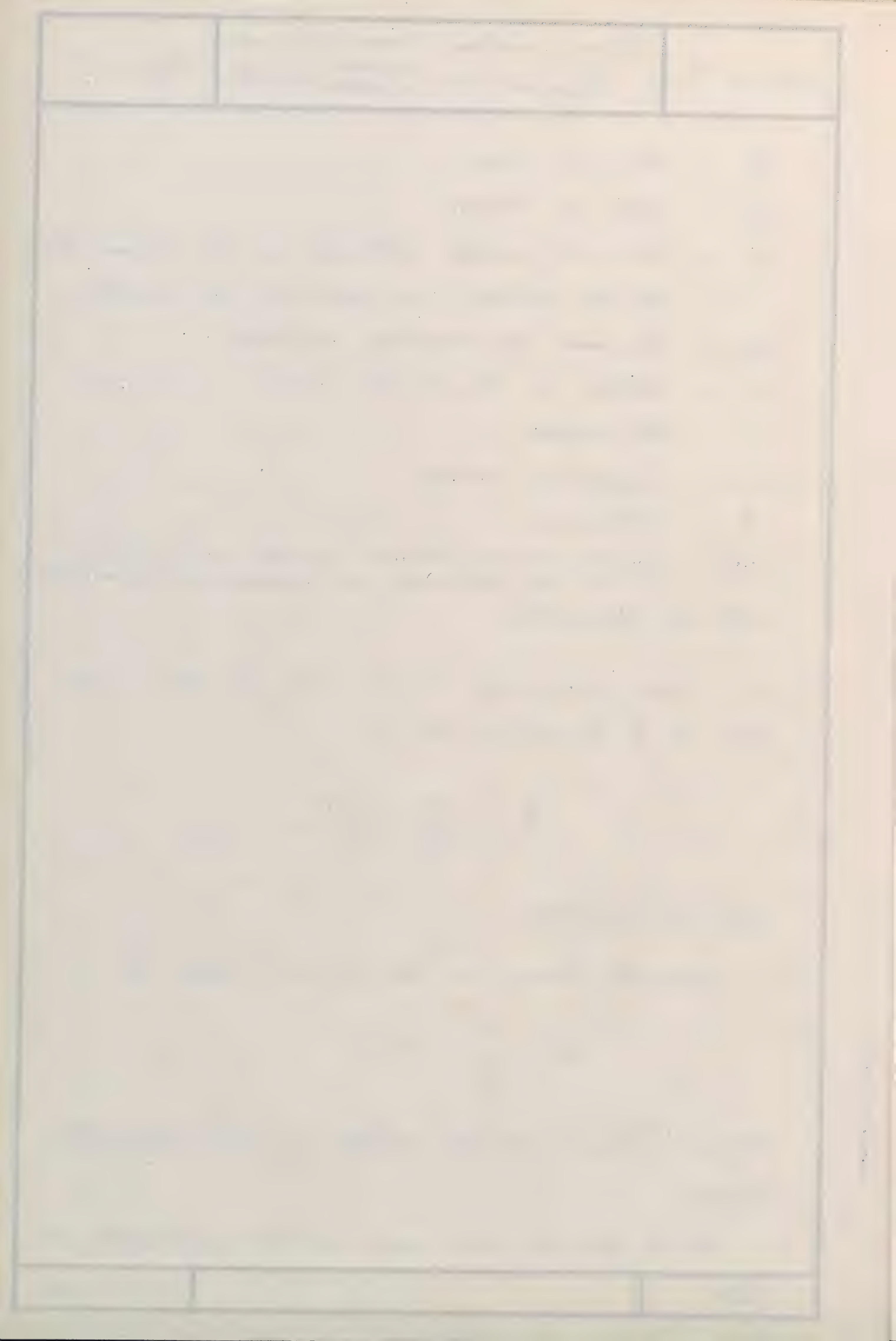
Lado "l_8" del octaedro

Igualmente hemos visto que (lám. 3, fórm. 31)

$$l_8 = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\, a$$

Altura "h" de la pirámide exterior a una cara del exaedro

En la lámina 23 se puede observar que dicha al-



tura es la diferencia entre el radio a de la esfera inscrita y el semilado $\frac{l_6}{2}$ del exaedro, por lo que

$$h = a - \frac{l_6}{2} = a - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}\, a = \frac{3-\sqrt{3}}{3}\, a$$

<u>Lado "f" del cuadrado intersección de un ángulo sólido del octaedro con una cara del exaedro</u>

En la lámina 3ª podemos comprobar que las cuatro caras concurrentes en un vértice del octaedro forman una pirámide recta de base cuadrada y altura <u>a</u>. Esta pirámide es cortada por una cara del exaedro cuyo plano es paralelo a la base de aquélla, produciendo otra pirámide recta de base cuadrada semejante a la primera.

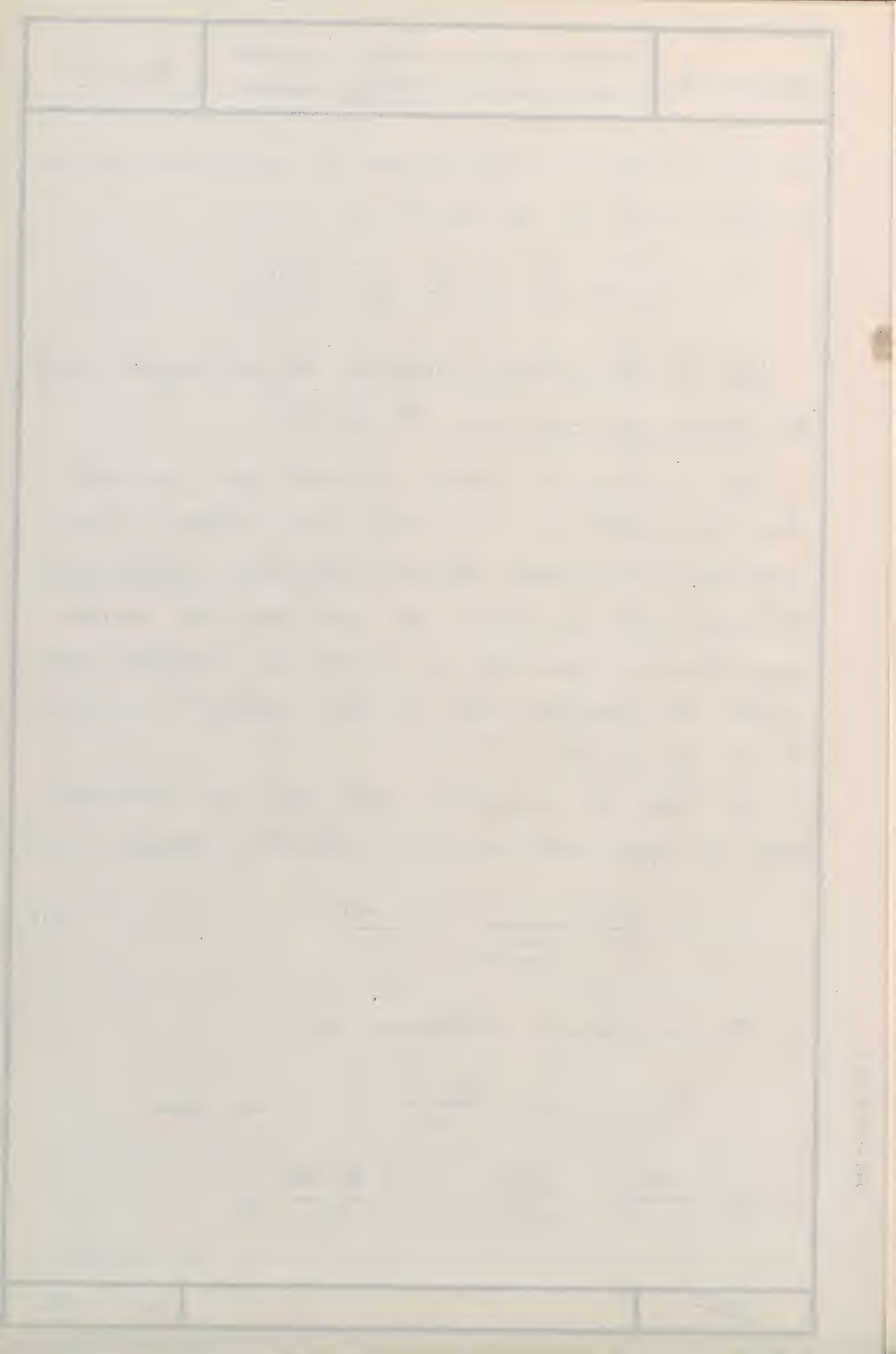
La razon de semejanza entre estas dos pirámides será la que excista entre sus respectivas alturas, o sea

$$\frac{a}{h} = \frac{a}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}\, a} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \qquad [1]$$

Por consiguiente, tendremos que

$$l_8 = f \times \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$ de donde

$$f = \frac{2\, l_8}{3+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}\, a = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}\, a$$



Desarrollo del cálculo anterior: $m = \dfrac{2\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}\,a =$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,(3-\sqrt{3})}{6}\,a = \boxed{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\,a}$$

Diagonal "g" del cuadrado anterior

Su valor será: $g = f\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2}\,a = \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\,a$

Desarrollo del cálculo anterior: $d = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2}\,a =$

$$= \frac{3\times\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{6}}{3}\,a = \frac{6-\sqrt{12}}{3}\,a = \boxed{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\,a}$$

Superficie lateral S

El área resultante de cada cara del exaedro, será

$$S_1 = l_6^2 - f^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\,a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\,a\right)^2$$

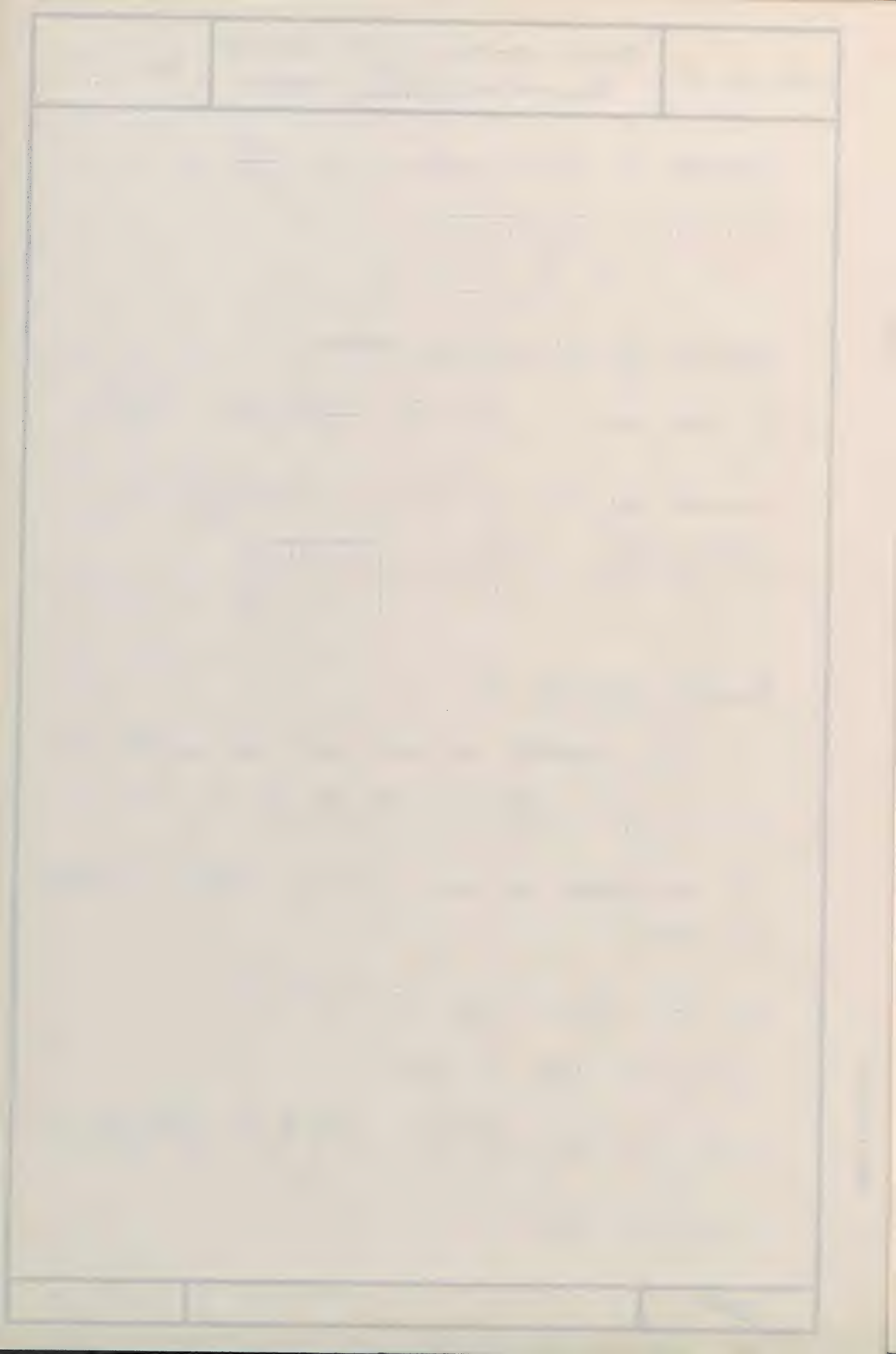
El área lateral de cada pirámide exterior a dicha cara, será

$$S_2 = \frac{4f}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\,f = \sqrt{3}\,f^2 = \sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\,a\right)^2$$

Y el área total S, será:

$$S = 6\,(S_1 + S_2) = 6\left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\,a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\,a\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\,a\right)^2 =\right.$$

$$= 4\times(6\sqrt{3}-8)\,a^2$$



Desarrollo del cálculo anterior:

$$S = 6\times\left[\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}a\right)^2 + \sqrt{3}\times\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}a\right)^2\right. = 6\times\left(\frac{12}{9}a^2 -\right.$$

$$- \frac{18+6-6\sqrt{12}}{9}a^2 + \sqrt{3}\times\frac{18+6-6\sqrt{12}}{9}a^2\Big) = 6\times\left(\frac{4}{3} - \frac{24-6\sqrt{12}}{9} +\right.$$

$$+ \left.\frac{\sqrt{3}\times(24-6\sqrt{12})}{9}\right)a^2 = 6\times\left(\frac{4}{3} - \frac{24-12\sqrt{3}}{9} + \frac{24\sqrt{3}-6\sqrt{36}}{9}\right)a^2 =$$

$$= \left(8 - \frac{6\times(8-4\sqrt{3})}{3} + \frac{6\times(8\sqrt{3}-2\times 6)}{3}\right)a^2 = \left(8 - (16-8\sqrt{3}) +\right.$$

$$+ \left.(16\sqrt{3}-24)\right)a^2 = \left(8-16+8\sqrt{3}+16\sqrt{3}-24\right)a^2 = \left(24\sqrt{3}-32\right)a^2 =$$

$$= \boxed{4\times(6\sqrt{3}-8)\,a^2}$$

Volumen V

Bastará sumar al volumen del exaedro, el de las 6 pirámides exteriores; su valor será:

$$V = (l_6)^3 + 6\,f^2\times\frac{h}{3} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^3 + 6\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}a\right)^2\times\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\times\frac{a}{3}\right) =$$

$$= \frac{8\times(9-4\sqrt{3})}{9}a^2$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$V = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^3 + 6\times\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}a\right)^2\times\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}a}{3} = \frac{8\times 3\sqrt{3}}{27}a^3 +$$



$$+ 2 \times \left(\frac{18 + 6 - 6\sqrt{12}}{9} a^2 \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3} a \right) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + 2 \times \frac{24 - 12\sqrt{3}}{9} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) a^2 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{2 \times 12 \times (2 - \sqrt{3}) \times (3 - \sqrt{3})}{27} \right) a^2 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \times 4 \times (6 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3)}{9} \right) a^3 = \frac{8\sqrt{3} + 8 \times (9 - 5\sqrt{3})}{9} a^3 =$$

$$= \frac{8\sqrt{3} + 72 - 40\sqrt{3}}{9} a^3 = \frac{72 - 32\sqrt{3}}{9} a^3 = \boxed{\frac{8 \times (9 - 4\sqrt{3})}{9} a^3}$$

Ángulo rectilíneo "2θ" del diedro formado por la intersección de una cara del exaedro con la correspondiente del octaedro.

De las figuras de la lámina 23 se deduce que dicho ángulo 2θ es suplementario del semiángulo φ_8 que forman dos caras contiguas del octaedro.

El valor conocido de 2φ es (ver lám. 3, fórm. 25) de 109° 28' 16,6", y por consiguiente será

$$2\theta = 180° - \frac{1}{2} (109° \ 28' \ 16,6") = 125° \ 15' \ 51.7"$$

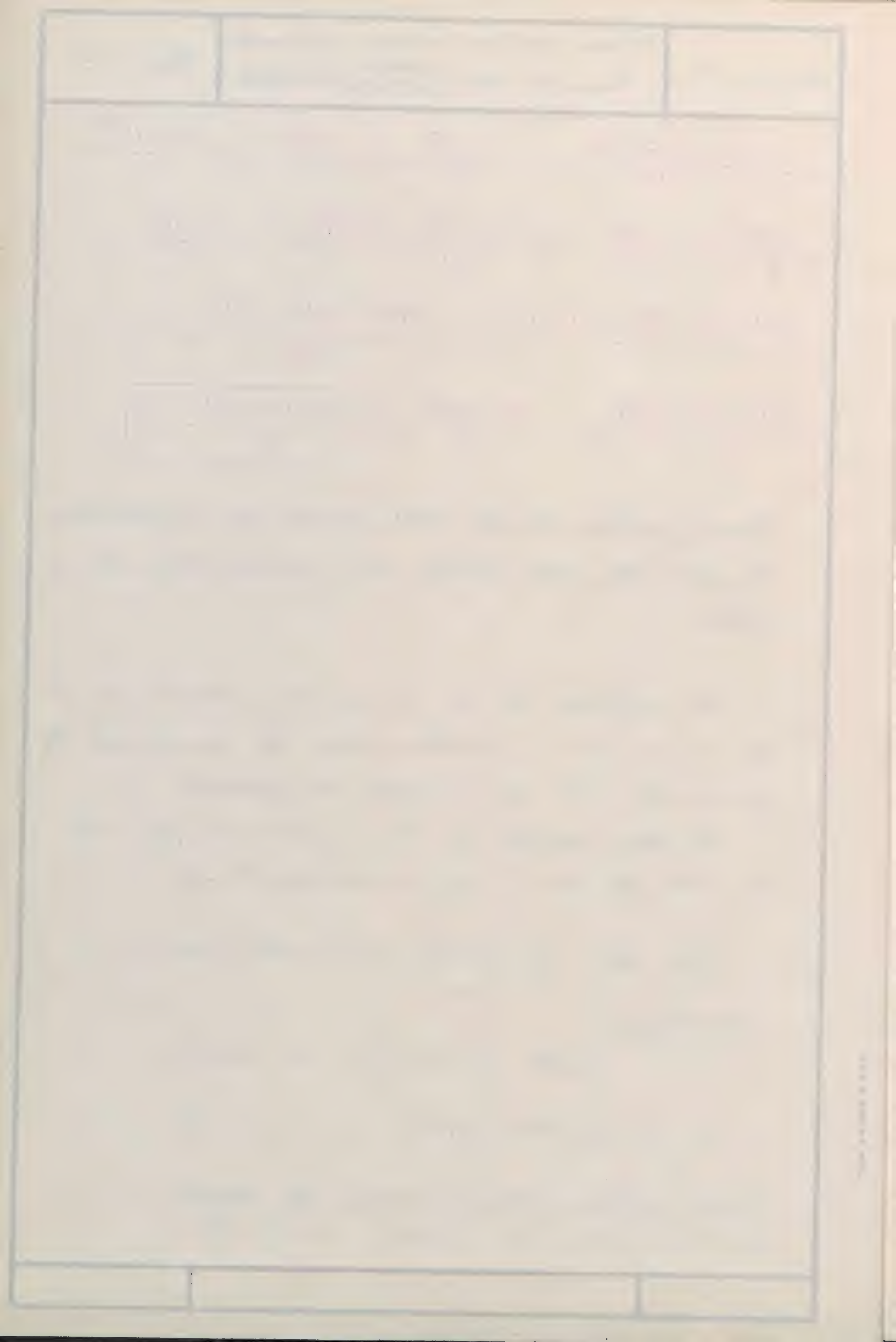
analíticamente

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} 2\theta &= \operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0,81\ 64\ 97 \\ \cos 2\theta &= \text{negativo} \end{aligned} \right\}$$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_6$" del diedro del exaedro

(ver lám. 2, fórm. 15) $\quad 2\varphi_6 = 90° \quad \operatorname{sen} \varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

UNE A4 210 X 297



Ángulo rectilíneo "$2\varphi_8$" del diedro del octaedro

(ver lám. 3. fórm. 25) $2\varphi_8 = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$ $\quad$ sen $\varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}$

En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos los resultados anteriores.

CUADRO SINÓPTICO

	Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
216	l_6	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\ a$	$1{,}\ 15\ 47\ 01 \ldots\ a$
217	l_8	$\sqrt{2}\ a$	$1{,}\ 41\ 42\ 14 \ldots\ a$
218	f	$\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\ a$	$0{,}\ 59\ 77\ 17 \ldots\ a$
219	g	$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}\ a$	$0{,}\ 84\ 52\ 99 \ldots\ a$
220	h	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}\ a$	$0{,}\ 42\ 26\ 50 \ldots\ a$
221	S	$4 \times (6\sqrt{3}-8)\ a^2$	$9{,}\ 56\ 92\ 19 \ldots\ a^2$
222	V	$\frac{8 \times (9-4\sqrt{3})}{9}\ a^3$	$1{,}\ 84\ 15\ 97 \ldots\ a^3$
223	2θ	$\pi - \frac{1}{2}(2\varphi_8)$	$125^\circ\ 15'\ 51{,}7''$
224	$2\varphi_6$	$\frac{\pi}{2}$	90°
225	$2\varphi_8$	arc sen $\frac{\sqrt{6}}{3}$	$109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$

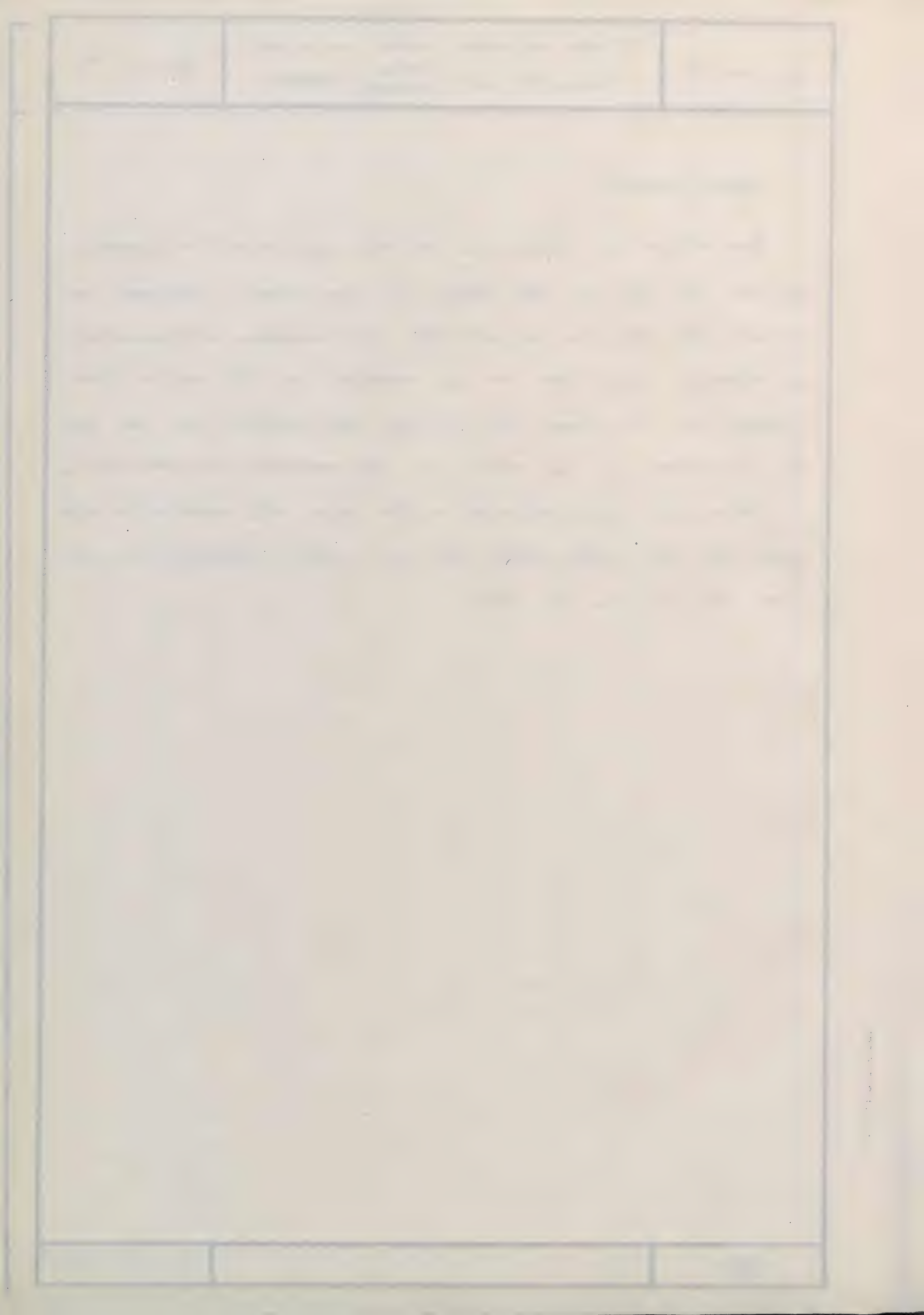


FIGURA CORPÓREA

Para obtener esta figura se construye previamente el exaedro regular de 63.5 mm de lado, en cuyas caras se dibujará previamente la base de la pirámide complementaria correspondiente al octaedro; dicha base es un cuadrado de 32.9 mm de lado colocado en el interior de la cara del exaedro con su centro coincidente y sus vértices en las mediatrices de los lados de ésta.

Posteriormente se acoplarán a las caras del exaedro las seis pirámides, formadas cada una por cuatro triángulos equiláteros de 32.9 mm de lado.

UNE A4 210 X 297



I

III

II

23,3 (h)

63,5 (l₆)

23,2 (h)

55,0 (a₈)

77,8 (l_8)

32,9 (f)

46,5 (g)

+Z

+X

O

+Y

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I II y III, el poliedro resultante de la intesección de un exaedro y octaedro regulares recíprocamente conjugados y de esfera circunscrita común, siendo los vértices de cada uno de ellos las proyecciones desde el centro de dicha esfera, y sobre ésta, de los centros de las caras del otro.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

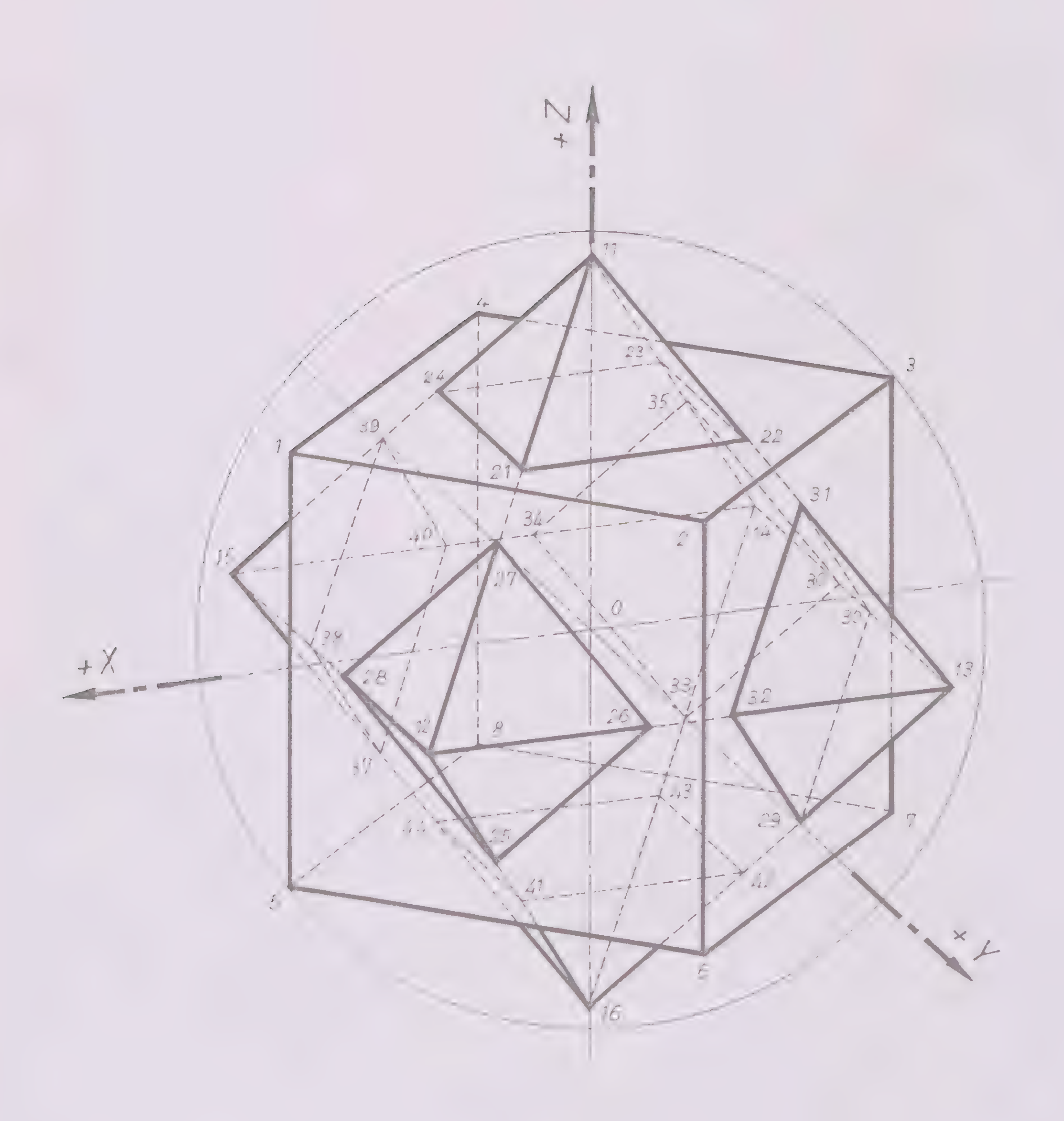
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro	1 al 8
Octaedro	11 al 16
Puntos de intersección	21 al 44

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 23 — Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS

C) De igual esfera circunscrita

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro resultante de la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares recíprocamente conjugados y de esfera circunscrita común, siendo los vértices de cada uno de ellos las proyecciones desde el centro de dicha esfera, y sobre ésta, de los centros de las caras del otro.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

$a_{12} = a_{20} = 55$ mm.

UNE A4 210 X 297



PROCESO GRÁFICO

Procederemos previamente a la representación del dodecaedro e icosaedro conjugados, inscritos en una misma esfera de 55 mm de radio.

Comencemos por el icosaedro regular, que colocaremos en la posición representada en la lámina 5, siguiendo el proceso gráfico de la misma. El lado l_{20} de este icosaedro, será (ver lám. 5, fórm. 43)

$$l_{20} = \frac{a_{20}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{55}{0,951057} = 57,8 \text{ mm}$$

El dodecaedro regular, conjugado del anterior e inscrito en su misma esfera, tendrá una posición en relación con el icosaedro ya dibujado, simétrica con respecto a su eje paralelo a Z de la representada en la lámina 4. El lado l_{12} de este dodecaedro, será (ver lám. 4, fórm. 30)

$$l_{12} = \frac{a_{12}}{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}} = \frac{55}{1,401259} = 39.3 \text{ mm.}$$

Planteado el problema de intersección de ambos poliedros, se puede obtener el resultado por aplicación del método de intersección de caras o de aristas cuyo fundamento se expone en la Geometría Descriptiva.

Esta intersección se reduce a la penetración de los ángulos

UNE A4 210 X 297

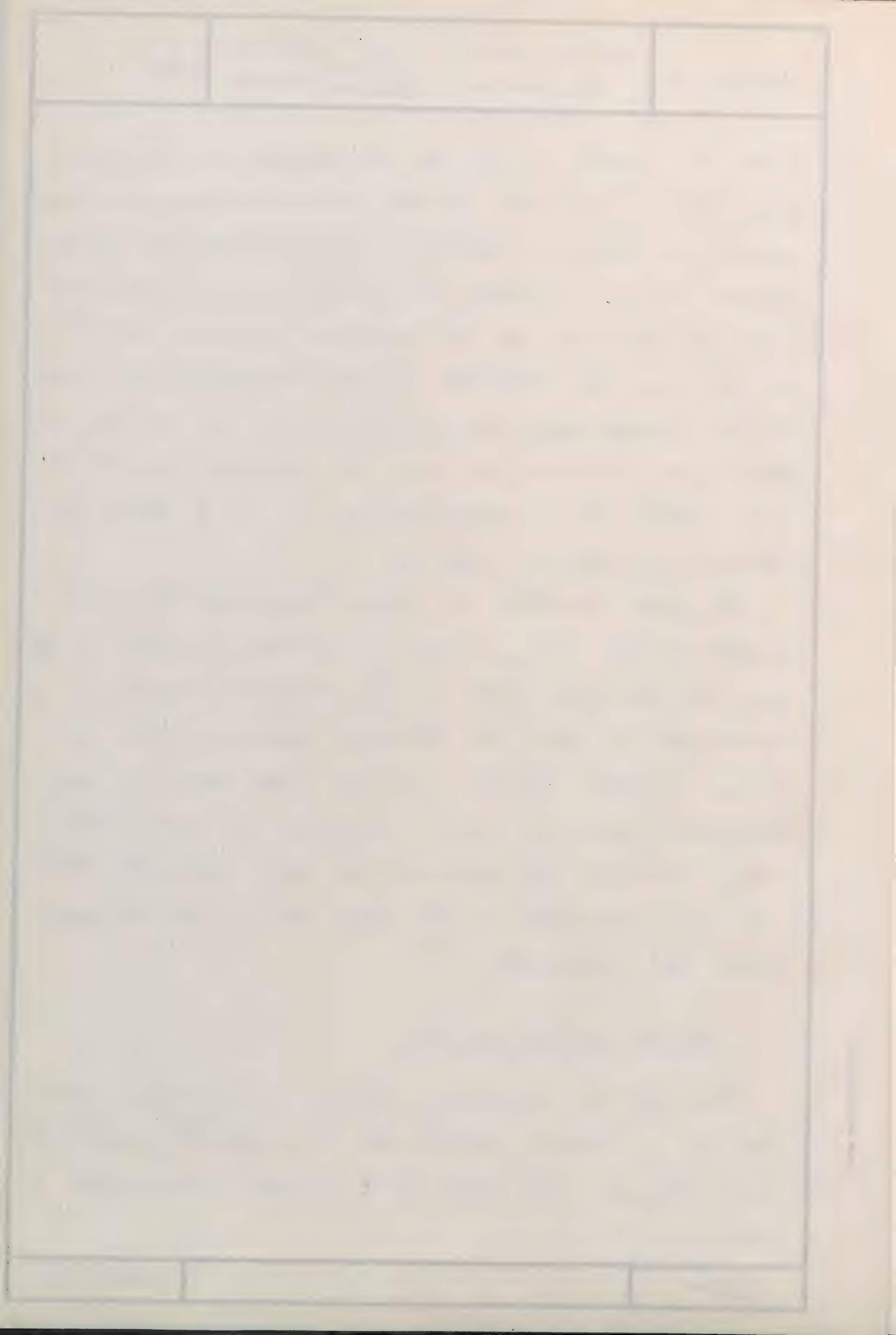


sólidos del icosaedro en las caras del dodecaedro que, por razones de simetría en la posición relativa de ambos poliedros, son todas iguales y en forma de pentágono regular. Combinando las proyecciones de los dos poliedros en los planos I y II, pueden obtenerse las proyecciones de estos pentágonos regulares situados en cada cara del dodecaedro (líneas de penetración del icosaedro en el dodecaedro) unas directamente y las restantes mediante giros adecuados de una de las aristas de dicho ángulo sólido. De las proyecciones en I y II se obtiene fácilmente la proyección sobre III.

El sólido resultante se compone básicamente de un dodecaedro regular en cuyas caras, y centradas con ellas, se apoyan seis pirámides rectas de base pentagonal regular, y caras laterales en forma de triángulos equiláteros. Estas pirámides son todas iguales y su base sobre cada cara del dodecaedro tiene el centro coincidente con el de dicha cara; los vértices del pentágono base de la pirámide están sobre las mediatrices de los lados de la cara correspondiente del dodecaedro.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para facilitar el dibujo y conseguir una mayor exactitud en su trazado, calcularemos las siguientes magnitudes en función del radio a de la esfera circunscrita común:



l_{12} = Lado del dodecaedro

l_{20} = Lado del icosaedro

f = Lado del pentágono regular intersección de un ángulo sólido del icosaedro con una cara del dodecaedro.

i = Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono anterior.

h = Altura de la pirámide exterior a una cara del dodecaedro

S = Superficie lateral

V = Volumen

2θ = Angulo rectilíneo del diedro formado en la intersección de una cara del dodecaedro con la correspondiente del icosaedro.

Lado "l_{12}" del dodecaedro

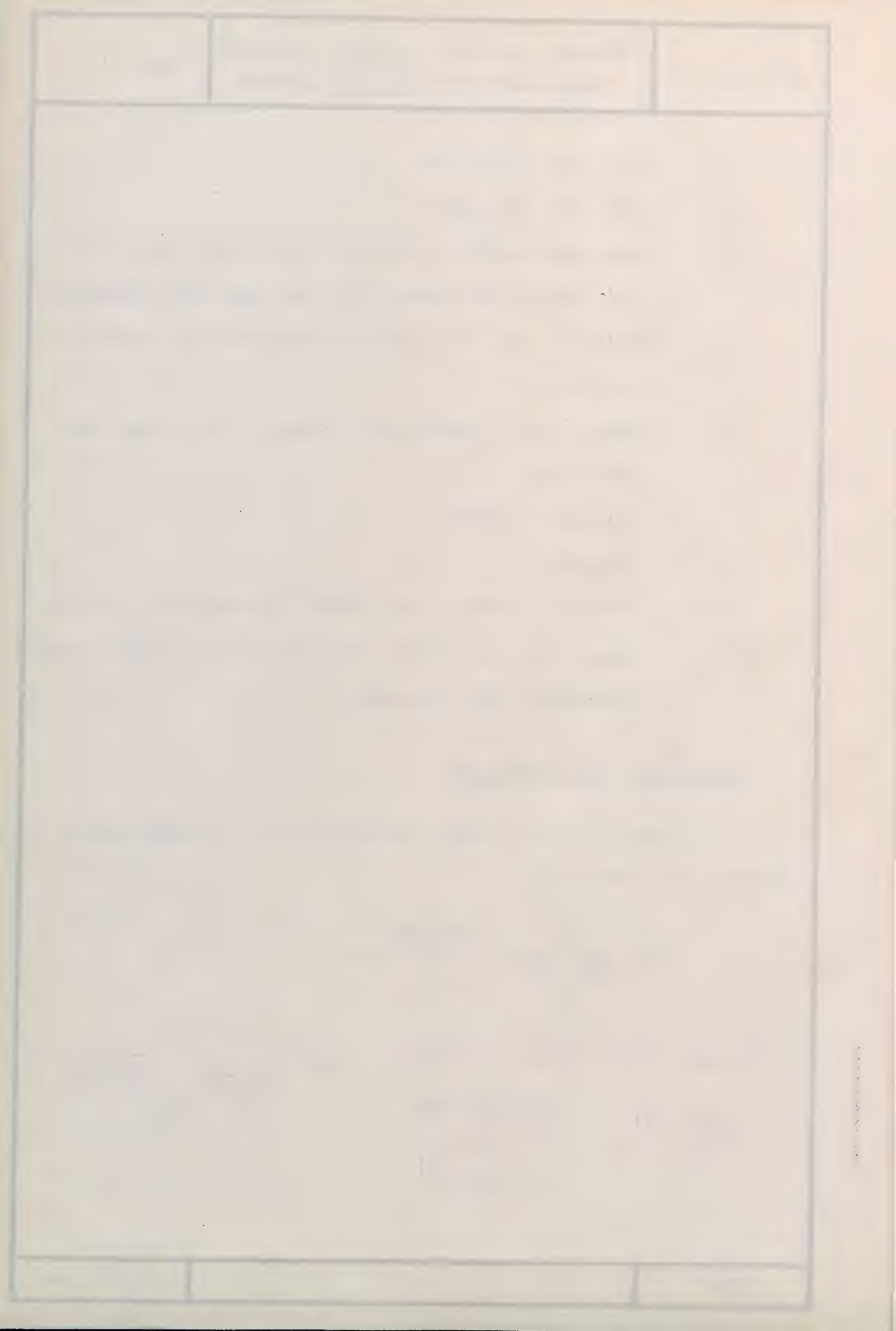
Ya lo hemos determinado anteriormente (se deduce de la fórmula 30, lám. 4)

$$l_{12} = \frac{a}{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,a$$

Desarrollo del cálculo anterior: $l_{12} = \frac{a}{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\,a =$

$$= \frac{4\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{15-3}\,a = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,a}$$

UNE A4 210 X 297



Lado "l_{20}" del icosaedro

Igualmente hemos visto que (lám. 5, fórmula 43)

$$l_{20} = \frac{a}{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{10 \times (5 - \sqrt{5})}}{5}\, a$$

Desarrollo del cálculo anterior: $l_{20} = \dfrac{a}{\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}} = \dfrac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a =$

$$= \frac{4\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10 + 2\sqrt{5}}\, a = \frac{4\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times (10 - 2\sqrt{5})}{100 - 20}\, a = \frac{4\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})^2}}{80}\, a =$$

$$= \frac{\sqrt{(100 - 20)(10 - 2\sqrt{5})}}{20}\, a = \frac{\sqrt{80 \times 2 \times (5 - \sqrt{5})}}{20}\, a = \frac{4\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}}{20}\, a = \boxed{\frac{\sqrt{10 \times (5 - \sqrt{5})}}{5}\, a}$$

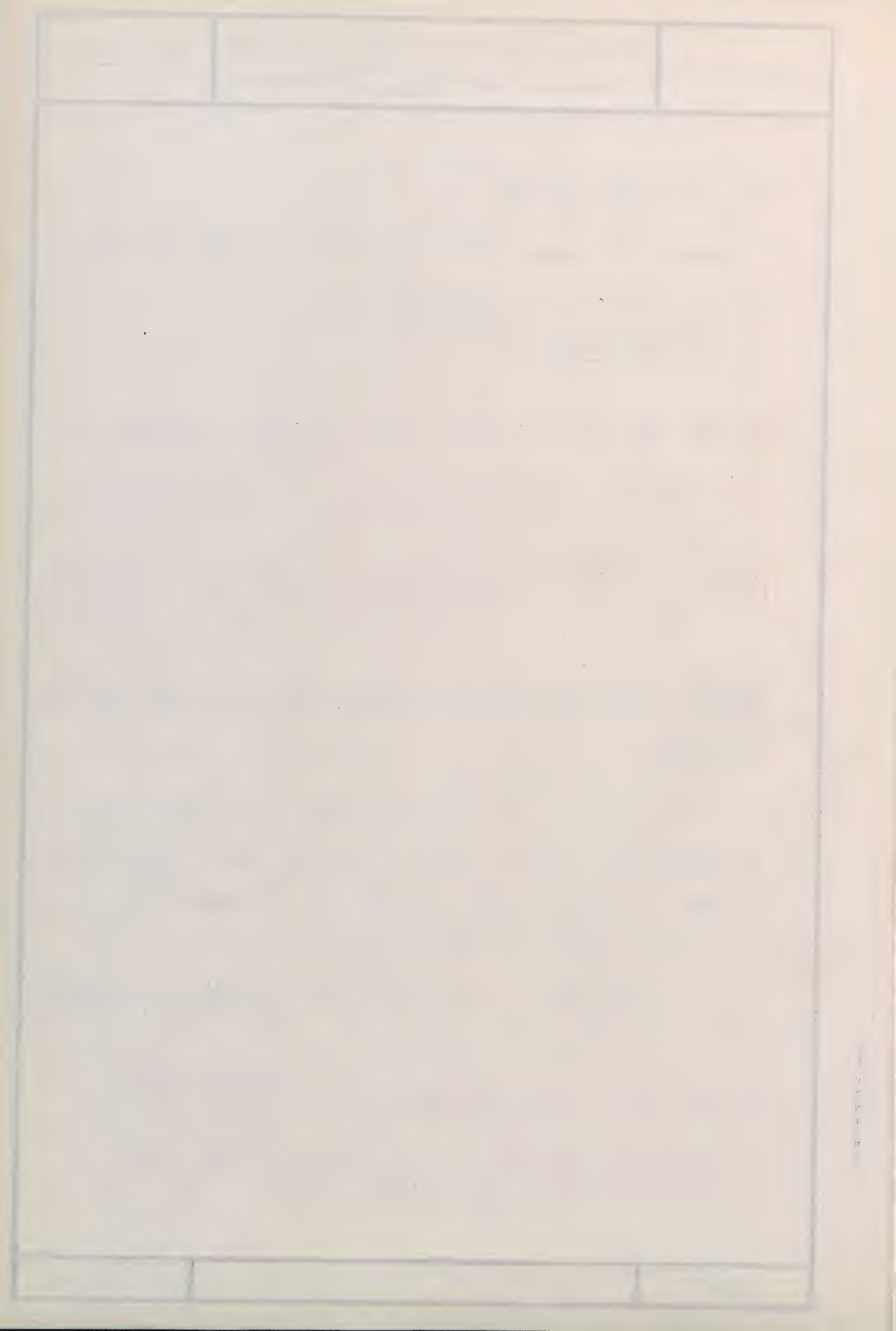
Altura "h" de la pirámide exterior a una cara del dodecaedro.

En la lámina 24 se puede observar que dicha altura es la diferencia entre el radio $\underline{a}$ de la esfera circunscrita y el radio c_{12} de la esfera inscrita en el dodecaedro (ver lám. 4, fórm. 32); su valor será pues

$$h = a - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}}\; l_{12} = a - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) a$$

Desarrollo del cálculo anterior: $h = a - \sqrt{\dfrac{11\sqrt{5} + 25}{40}} \times \dfrac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, a =$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40} \times \left(\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\right)^2}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40} \times \frac{15 + 3 - 2\sqrt{45}}{9}}\right) a =$$



$$= \left(1 - \sqrt{\frac{11\sqrt{5} + 25}{40} \times \frac{18 - 6\sqrt{5}}{9}}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{(11\sqrt{5} + 25)(3 - \sqrt{5})}{60}}\right) a =$$

$$= \left(1 - \sqrt{\frac{33\sqrt{5} + 75 - 55 - 25\sqrt{5}}{60}}\right) a = \left(1 - \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{60}}\right) a = \boxed{\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) a}$$

Lado "f" del pentágono regular intersección de un ángulo sólido del icosaedro, con una cara del dodecaedro.

En la lámina 24 podemos comprobar que las cinco caras concurrentes en un vértice del icosaedro forman una pirámide recta, regular, pentagonal de altura "g_{20}", cuyo valor es (ver lám. 5, fórmula 20)

$$g_{20} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

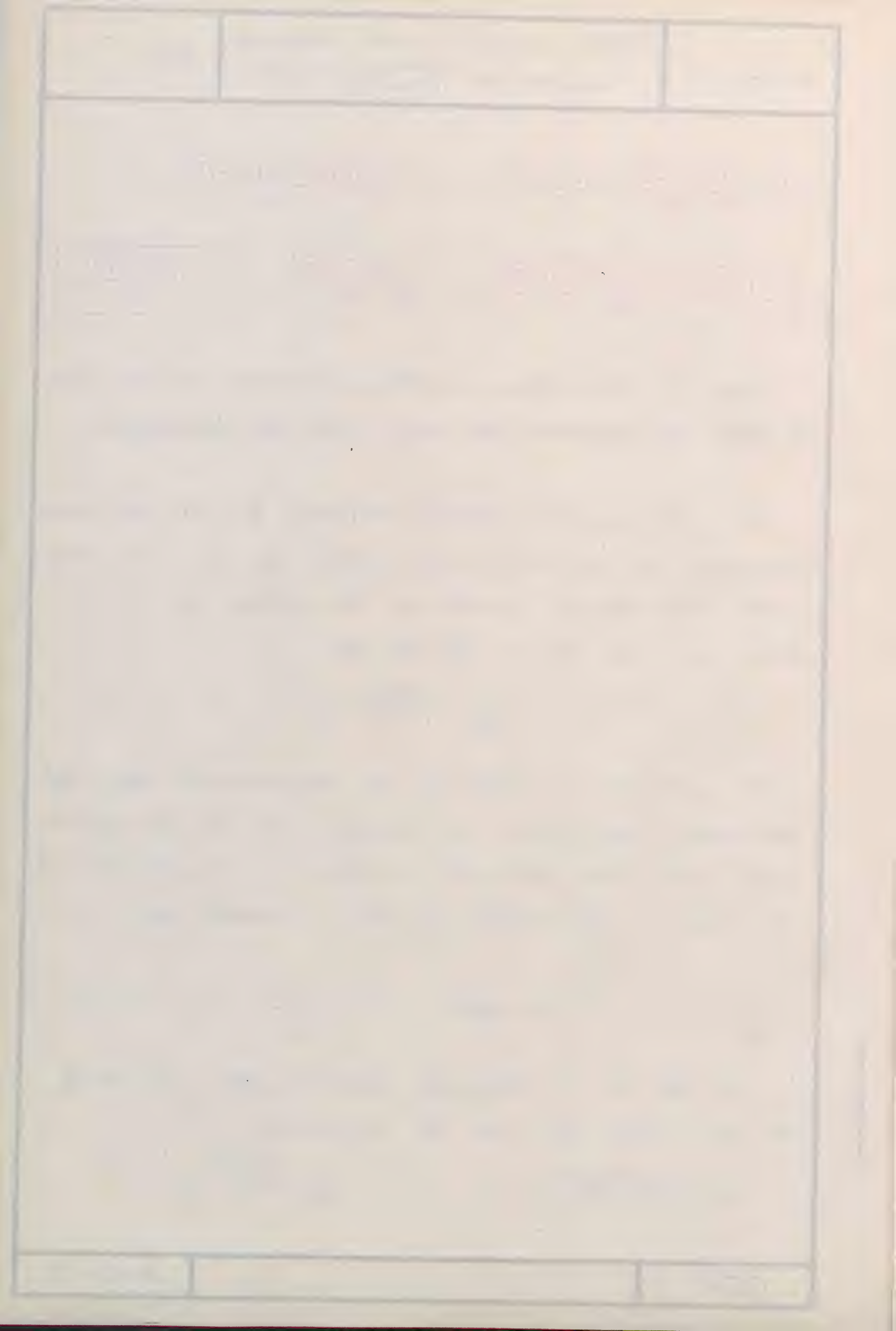
Esta pirámide es cortada por la correspondiente cara del dodecaedro, cuyo plano es paralelo a la base de aquélla, produciendo otra pirámide semejante a la primera. De la semejanza de ambas pirámides se deduce que

$$\frac{l_{20}}{g_{20}} = \frac{f}{h} \qquad \text{de donde} \qquad f = \frac{h \times l_{20}}{g_{20}}$$

El valor de "h" deducido anteriormente, y el de g_{20} (ver lám. 5, fórm. 20), son los siguientes:

$$h = \left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) a \quad ; \quad g_{20} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

UNE A4 210 X 297



que sustituidos en la anterior, nos da

$$f = \frac{h \cdot l_{20}}{g_{20}} = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) a \, l_{20}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \, l_{20}} = \frac{1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} a = \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} a$$

Desarrollo del cálculo anterior: $f = \frac{1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} a =$

$$\frac{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}}{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} a = \frac{10\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,(5+\sqrt{5})}{20} a =$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2}{10}}}{2} a = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{20\,(5+\sqrt{5})}{10}}}{2} a =$$

$$= \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{2\,(5+\sqrt{5})}{4}}\, a = \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\; a =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{30}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{30}}\right] a =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{35+15\sqrt{5}}{30}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{\sqrt{6}}\right] a =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{6}}\right) a = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \left(\sqrt{\frac{9}{12}}+\sqrt{\frac{5}{12}}\right)\right) a =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right] a =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right) a = \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right) a = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} - \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}\right) a =$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} a}$$



Radio "i" de la circunferencia circunscrita al pentágono base

En Geometría se obtiene el radio r de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular, por la expresión

$$r_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5$$

que aplicada al caso que nos ocupa, nos da

$$i = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6}\, a = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{35+11\sqrt{5}}{30}} \right) a$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$i = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6}\, a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{5}}{6} \right] a = \left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{6} \right] a =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2}{20}} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{10}} \right] a = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}{10}}\, a =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{5}(5+\sqrt{5})}{10} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{10}} \right] a = \left[\frac{5\sqrt{5}+5}{10} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15}{5}} \right] a =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}} \right] a = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{3 \times 2 \times (25+11\sqrt{5})}{6^2 \times 5}} \right] a =$$

$$= \boxed{\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{30}} \right] a}$$



Superficie lateral S

A cada cara del dodecaedro habrá que deducir el área del pentágono base de la pirámide que se apoya en ella: En Geometría se obtiene el área de un pentágono regular, en función de su lado, por la fórmula

$$S_5 = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}\, l_5^2$$

que aplicada al caso que nos ocupa, nos permite obtener el área lateral S_1 de las caras del dodecaedro, como sigue:

$$S_1 = 12 \times \left[\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} a \right)^2 \right] =$$

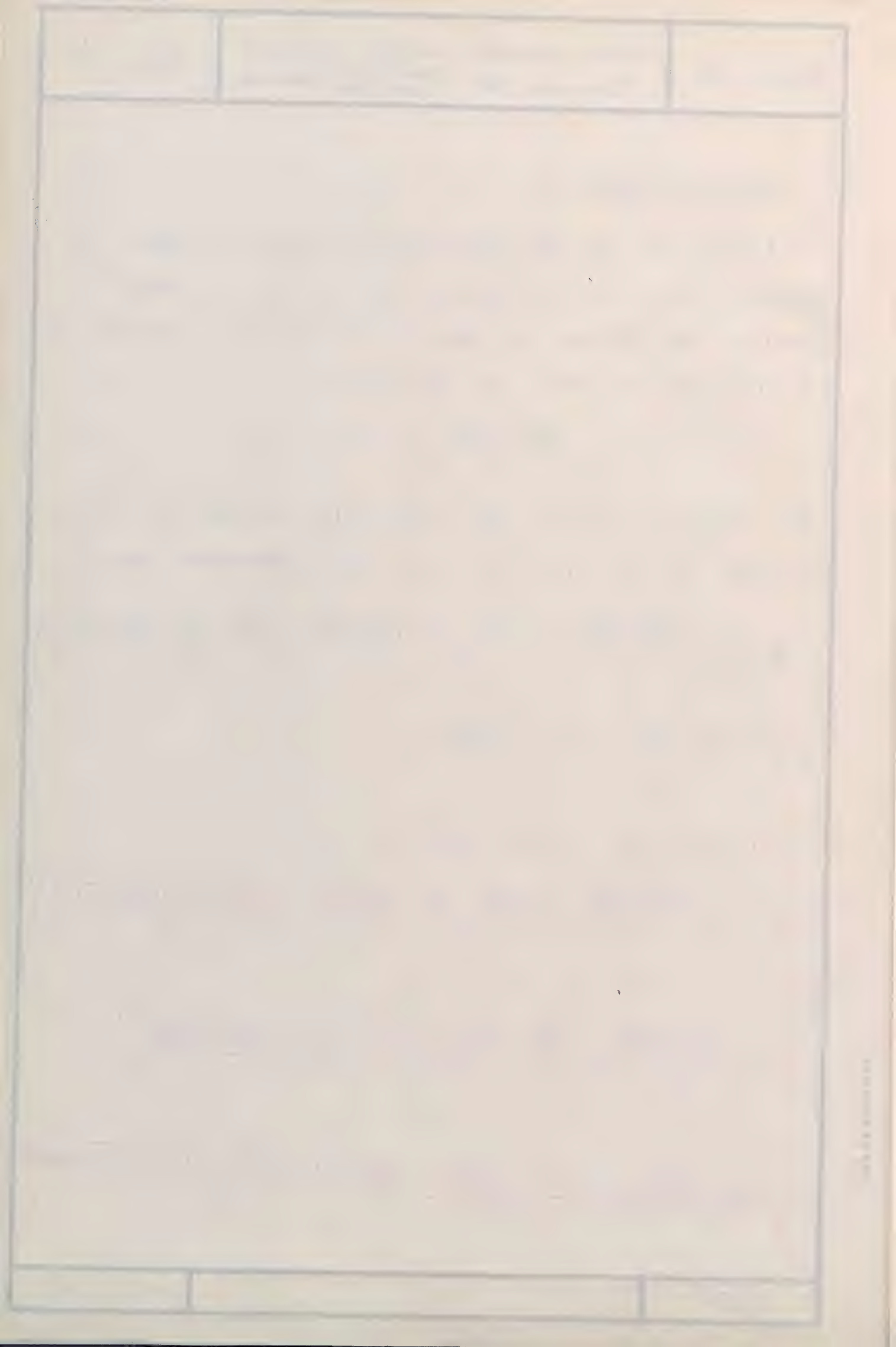
$$= 5 \times \left[7\sqrt{3} + 3\sqrt{15} - \sqrt{10\,(25+11\sqrt{5})} \right] a^2$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$S_1 = 12 \times \left[\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a \right)^2 - \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} a \right)^2 \right] =$$

$$= 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} a^2 \left[\left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6} \right)^2 \right] =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\, a^2 \left(\frac{15+3-2\sqrt{45}}{9} - \frac{9(10+2\sqrt{5}) + (3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2 - 6\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{36} \right) =$$



$$= 3\sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\frac{18-6\sqrt5}{9} - \frac{90+18\sqrt5+(27+15+6\sqrt{45}) - 6\sqrt{2(5+\sqrt5)(3\sqrt3+\sqrt{15})^2}}{36}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\frac{6-2\sqrt5}{3} - \frac{90+18\sqrt5+42+18\sqrt5 - 6\sqrt{2(5+\sqrt5)(27+15+6\sqrt{45})}}{36}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\frac{6-2\sqrt5}{3} - \frac{132+36\sqrt5 - 6\sqrt{2(5+\sqrt5)(42+18\sqrt5)}}{36}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\frac{6-2\sqrt5}{3} - \frac{22+6\sqrt5 - \sqrt{2\times 6\times(5+\sqrt5)(7+3\sqrt5)}}{6}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\frac{6-2\sqrt5}{3} - \frac{22+6\sqrt5 - 2\sqrt{3(35+7\sqrt5+15\sqrt5+15)}}{6}\right) =$$

$$= 3\sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\frac{6-2\sqrt5}{3} - \frac{11+3\sqrt5 - \sqrt{3(50+22\sqrt5)}}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(6-2\sqrt5 - \left(11+3\sqrt5 - \sqrt{6(25+11\sqrt5)}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(6-2\sqrt5-11-3\sqrt5+\sqrt{6(25+11\sqrt5)}\right) =$$

$$= \sqrt{25+10\sqrt5}\; a^2\left(\sqrt{6(25+11\sqrt5)} - 5(1+\sqrt5)\right) =$$

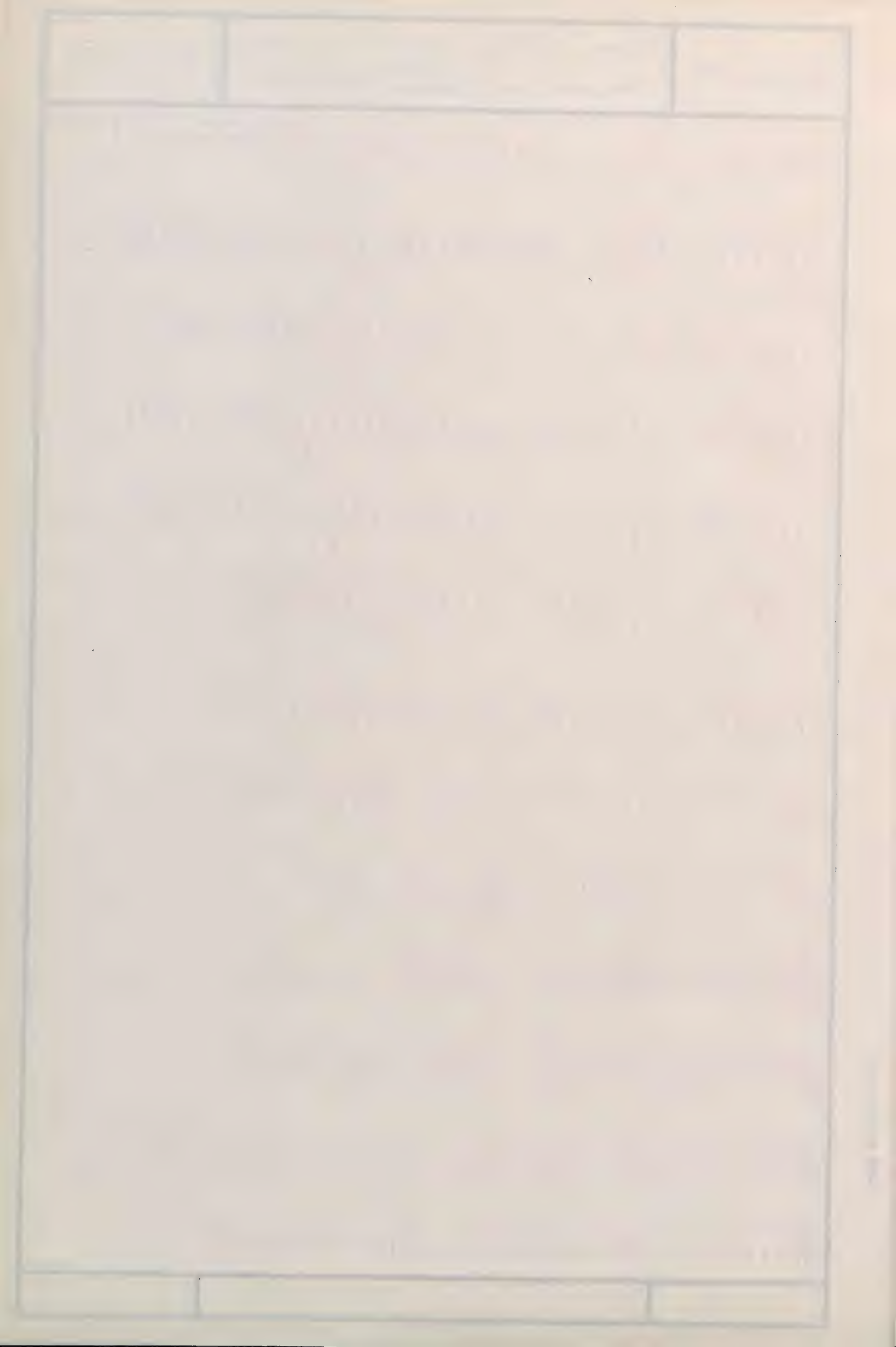
$$= \left[\sqrt{25+10\sqrt5}\times\sqrt{6(25+11\sqrt5)} - \sqrt{25+10\sqrt5}\times 5(1+\sqrt5)\right] a^2 =$$

$$= \left[\sqrt{(25+10\sqrt5)(25+11\sqrt5)\times 6} - 5\sqrt{(25+10\sqrt5)(1+\sqrt5)^2}\right] a^2 =$$

$$= \left[\sqrt{6(25^2+11\times 25\sqrt5+250\sqrt5+110\times 5)} - 5\sqrt{(25+10\sqrt5)(1+5+2\sqrt5)}\right] a^2 =$$

$$= \left[\sqrt{6\times 25(25+11\sqrt5+10\sqrt5+22)} - 5\sqrt{2(25+10\sqrt5)(3+\sqrt5)}\right] a^2 =$$

UNE A4 210 X 297



$$= \left[5\sqrt{6\left(47+21\sqrt{5}\right)} - 5\sqrt{2\left(75+30\sqrt{5}+25\sqrt{5}+50\right)} \right] a^2 =$$

$$= \left[5\sqrt{6}\sqrt{47+21\sqrt{5}} - 5\sqrt{2\left(125+55\sqrt{5}\right)} \right] a^2 = \quad \text{y siendo } 47^2-\left(21\sqrt{5}\right)^2 = 2^2$$

$$= \left[5\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{49}{2}}+\sqrt{\frac{45}{2}}\right) - 5\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)} \right] a^2 =$$

$$= \left[5\times\left(\frac{\sqrt{6}\sqrt{49}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}\sqrt{45}}{\sqrt{2}}\right) - 5\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)} \right] a^2 =$$

$$= 5\cdot\left[7\sqrt{3}+\sqrt{3}\times 3\sqrt{5} - \sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)} \right] a^2 =$$

$$= \boxed{5\left[7\sqrt{3}+3\sqrt{15} - \sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)} \right] a^2}$$

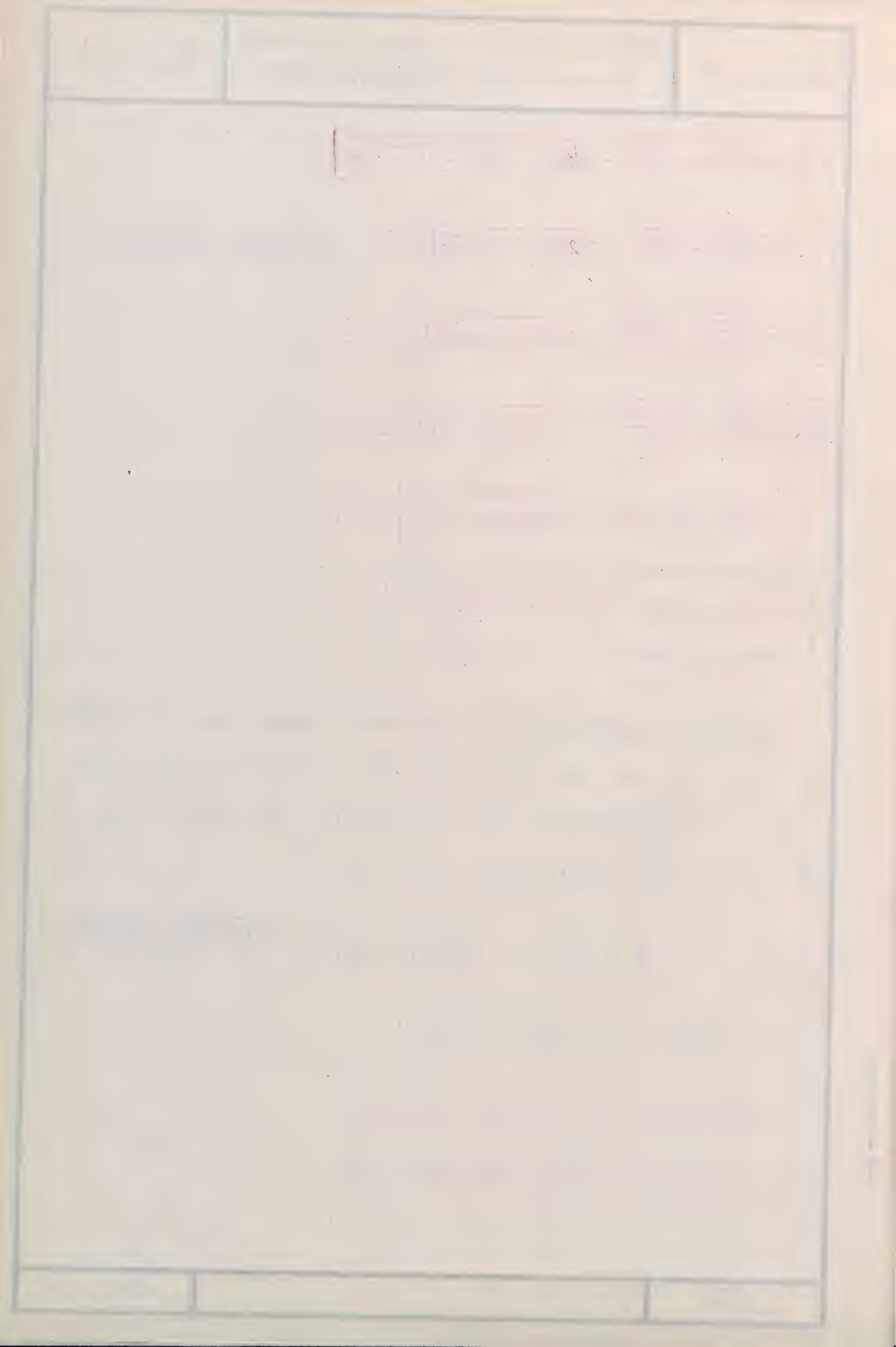
Al área anteriormente calculada, habrá que añadirle el área S_2 de las doce pirámides rectas pentagonales, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros de lado "f".- Su superficie será,

$$S_2 = 12 \times \frac{5}{2} f \times \frac{\sqrt{3}}{2} f = 15\sqrt{3}\, f^2 = 15\sqrt{3} \times \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{6} a \right)^2 =$$

$$= 5\left(11\sqrt{3} + 3\sqrt{15} - 3\sqrt{2\left(25+11\sqrt{5}\right)} \right) a^2$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$S_2 = 15\sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{6} a \right)^2 =$$



$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{9(10+2\sqrt{5})+(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2-6\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times(3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{36}\right)=$$

$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{18(5+\sqrt{5})+(27+15+6\sqrt{45})-6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}}{36}\right)=$$

$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{18(5+\sqrt{5})+6(7+3\sqrt{5})-6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})}}{36}\right)=$$

$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{3(5+\sqrt{5})+(7+3\sqrt{5})-\sqrt{2(5+\sqrt{5})(42+18\sqrt{5})}}{6}\right)=$$

$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{15+3\sqrt{5}+7+3\sqrt{5}-\sqrt{2(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})\times 6}}{6}\right)=$$

$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{22+6\sqrt{5}-2\sqrt{3(35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15}}{6}\right)=$$

$$= 15\sqrt{3}\,a^2\left(\frac{11+3\sqrt{5}-\sqrt{3(50+22\sqrt{5})}}{3}\right)= 5\sqrt{3}\left(11+3\sqrt{5}-\sqrt{3\times 2(25+11\sqrt{5})}\,a^2=\right.$$

$$= 5\left(11\sqrt{3}+3\sqrt{15}-\sqrt{3}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})}\,a^2 = \boxed{5\left(11\sqrt{3}+3\sqrt{15}-3\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}\,a^2\right.}\right.$$

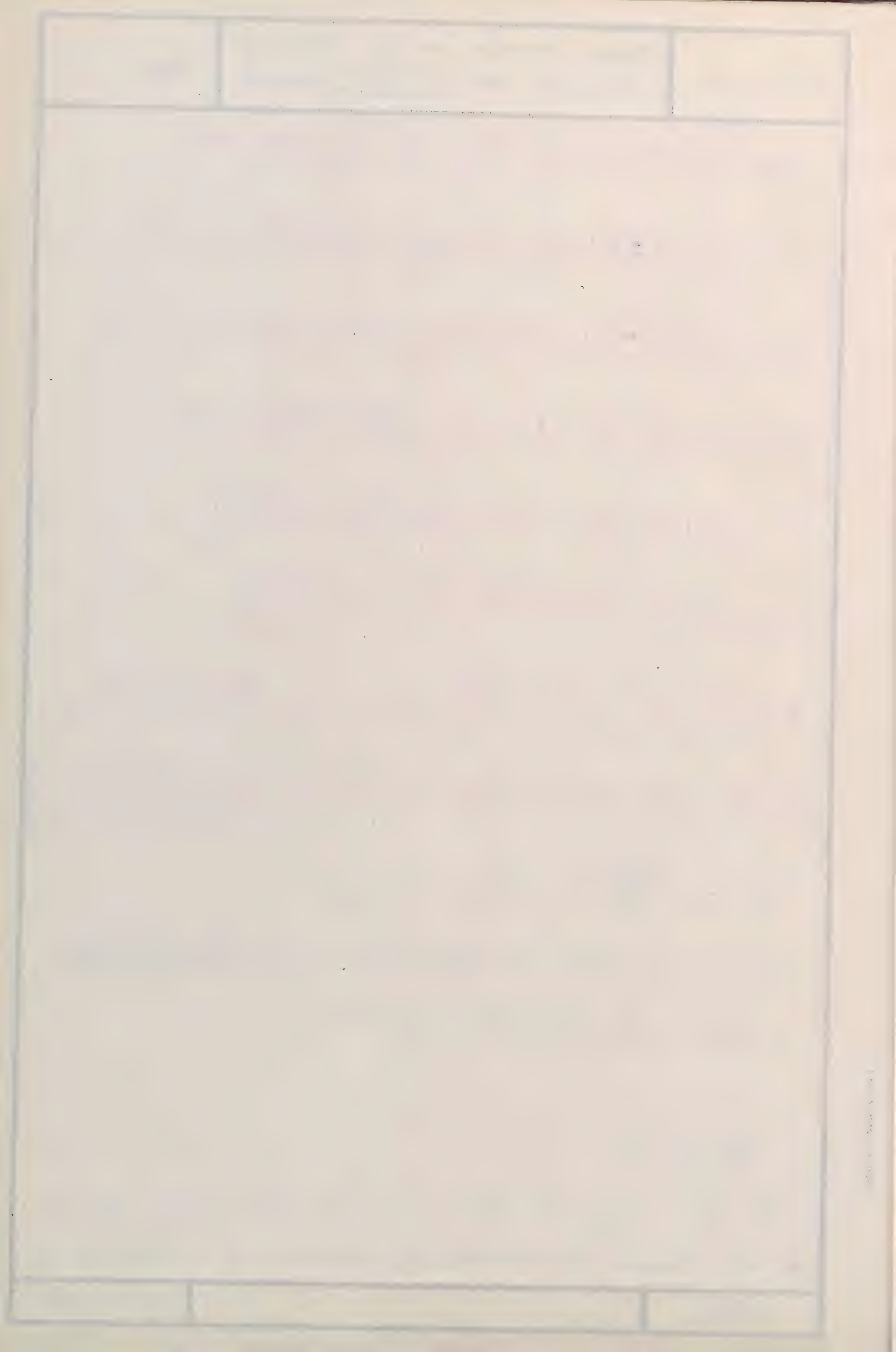
Al área total de poliedro, valdrá pues

$$S = S_1 + S_2 = 5\left(7\sqrt{3}+3\sqrt{15}-\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}\right)a^2 + 5\left(11\sqrt{3}+3\sqrt{15}-3\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}\right)a^2 =$$

$$= 5\left(18\sqrt{3}+6\sqrt{15}-\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}-3\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}\right)a^2$$

Volumen V

El volumen V de este poliedro se puede determinar, sumando al volumen V_1 del dodecaedro regular, el volumen V_2 de



las doce pirámides que se apoyan sobre sus caras.

Así pues, tendremos que (ver lám. 4, fórm. 41)

$$V_1 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\left(l_{12}\right)^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,a\right)^3 = \frac{10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{9}\,a^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V_1 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,a\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{15\sqrt{15} - 3 \times 15 \times \sqrt{3} + 3\sqrt{15} \times 3 - 3\sqrt{3}}{3^3}\,a^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times$$

$$\times \frac{5\sqrt{15} - 15\sqrt{3} + 3\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3^2}\,a^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \frac{8\sqrt{15} - 16\sqrt{3}}{9}\,a^3 =$$

$$= \frac{8 \times (7\sqrt{5}+15)(\sqrt{15}-2\sqrt{3})}{4 \times 9}\,a^3 = \frac{2 \times (7\sqrt{15 \times 5} + 15\sqrt{15} - 14\sqrt{5 \times 3} - 30\sqrt{3})}{9}\,a^3 =$$

$$= \frac{2 \times (7 \times 5 \times \sqrt{3} + 15\sqrt{15} - 14\sqrt{15} - 30\sqrt{3})}{9}\,a^3 = \frac{2(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9}\,a^3 =$$

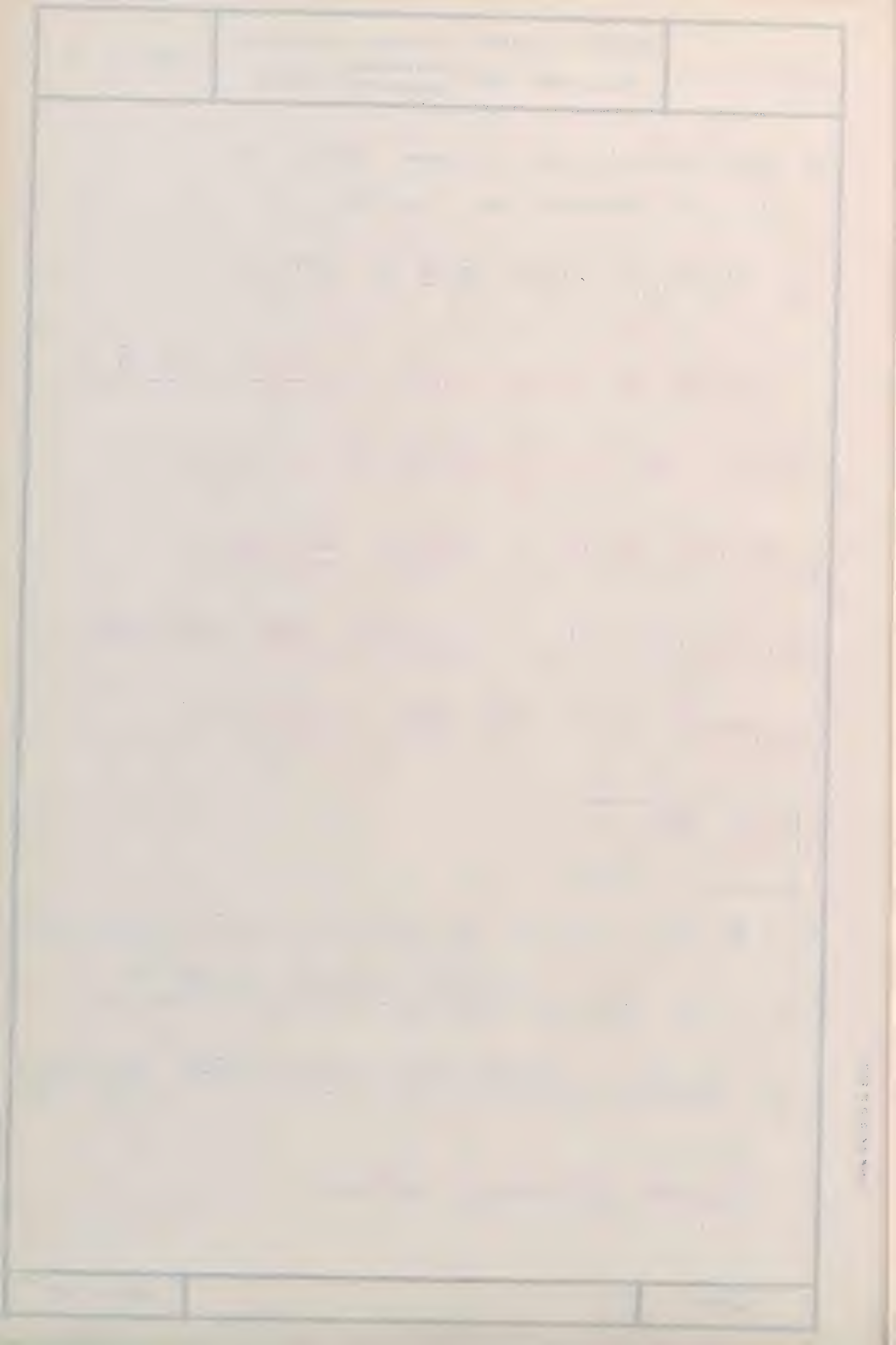
$$= \boxed{\frac{10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{9}\,a^3}$$

El volumen V_2 de las doce pirámides pentagonales será:

$$V_2 = 12\left(S_5 \times \frac{h}{3}\right) = 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6}\,a\right)^2 \times$$

$$\times \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)a = \left[\frac{\sqrt{10(745+331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445+199\sqrt{5})}}{3} - \frac{190\sqrt{3}+82\sqrt{15}}{9}\right]a^3$$

Desarrollo del cálculo anterior:



$$V_2 = 12 \times \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{6}\,a\right)^2 \times \frac{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)}{3}\,a =$$

$$= \frac{12}{4\times 6^2 \times 3} \times \sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \times \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) \times \left(3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)^2 a^3 =$$

$$= \frac{1}{36} \times \left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{5}\ \sqrt{5+2\sqrt{5}} \times \sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}\right] \times \left[9 \times (10+2\sqrt{5}) + (3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2 - \right.$$

$$\left. - 6\sqrt{2(5+\sqrt{5})} \times (3\sqrt{3}+\sqrt{15})\right] a^3 = \frac{1}{36}\left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{(5+2\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right] \times$$

$$\times \left[18(5+\sqrt{5}) + (27+15+6\sqrt{45}) - 6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}\right] a^3 =$$

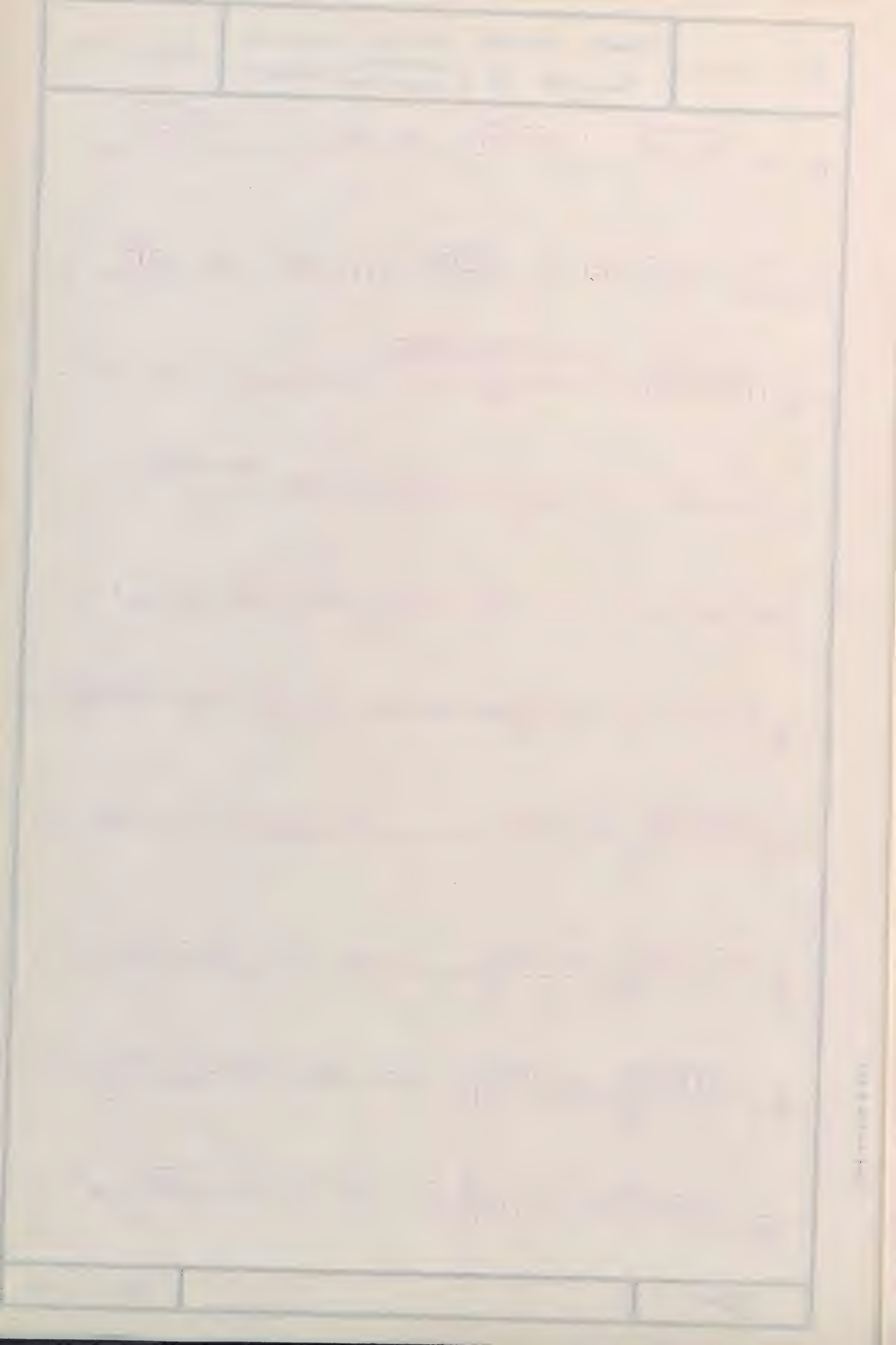
$$= \frac{1}{36}\left[\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} - \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right]\left[90 + 18\sqrt{5} + 42 + 18\sqrt{5} - 6\sqrt{2(5+\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})}\right] a^3 =$$

$$= \frac{1}{36}\left[\frac{\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - (5+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}}\right] \times \left[132 + 36\sqrt{5} - 6\sqrt{2(5+\sqrt{5}) \times 6(7+3\sqrt{5})}\right] a^3 =$$

$$= \frac{1}{36}\left[\frac{\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - (5+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}}\right] \cdot \left[132 + 36\sqrt{5} - 12\sqrt{3(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5}}\right] a^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - (5+2\sqrt{5})}{\sqrt{3}}\right] \times \left[11 + 3\sqrt{5} - \sqrt{3(35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15)}\right] a^3 =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}\left((\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - (5+2\sqrt{5})\right) \times \left[11 + 3\sqrt{5} - \sqrt{3(50+22\sqrt{5})}\right] a^3 =$$



$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\left[\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - (5+2\sqrt{5})\right] \times \left[(11+3\sqrt{5}) - \sqrt{6(25+11\sqrt{5})}\right] a^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\left((11+3\sqrt{5})\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - (11+3\sqrt{5})(5+2\sqrt{5}) - \sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})} +\right.$$

$$\left. + (5+2\sqrt{5})\sqrt{6(25+11\sqrt{5})}\right) a^3 = \left[\frac{\sqrt{3}}{9} \times (11+3\sqrt{5})\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{3}}{9}(11+3\sqrt{5})(5+2\sqrt{5}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{3}}{9}(5+2\sqrt{5})\sqrt{6(25+11\sqrt{5})}\right] a^3 =$$

$[A - B - C + D]\, a^3$; en donde

$$A = \frac{\sqrt{3}}{9}(11+3\sqrt{5})\sqrt{15(5+2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})(11+3\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{45(5+2\sqrt{5})(121+45+66\sqrt{5})} = \frac{3}{9}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})(166+66\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{5 \times 2\,(5+2\sqrt{5})(83+33\sqrt{5})} = \frac{1}{3}\sqrt{10(415+166\sqrt{5}+165\sqrt{5}+330)} =$$

$= \frac{1}{3}\sqrt{10(745+331\sqrt{5})}$ siendo 331, primo y $745^2 - (331\sqrt{5})^2 = 7220$

por lo que $84^2 < 7220 < 85^2$, no puede simplificarse más.

Igualmente

$$B = \frac{\sqrt{3}}{9}(11+3\sqrt{5})(5+2\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{3}}{9}(55+15\sqrt{5}+22\sqrt{5}+30) = \frac{\sqrt{3}}{9}(85+37\sqrt{5}) =$$

$$= \frac{85\sqrt{3}+37\sqrt{15}}{9}$$

Análogamente

$$C = \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{15(5+2\sqrt{5})}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}}{9} \times 3\sqrt{10(5+2\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{10(125+50\sqrt{5}+55\sqrt{5}+110)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{10(235+105\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{30 \times 5(47+21\sqrt{5})} = \frac{5}{3}\sqrt{6(47+21\sqrt{5})} =$$ y siendo

$47^2 - (21\sqrt{5})^2 = 2^2$, será $= \frac{5}{3}\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{45}{2}}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{3}\left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) =$

$$= \frac{5}{3}\left(7\sqrt{\frac{6}{2}} + 3\sqrt{\frac{30}{2}}\right) = \frac{5}{3}(7\sqrt{3} + 3\sqrt{15}) = \frac{35\sqrt{3}}{3} + \frac{15\sqrt{15}}{3}$$

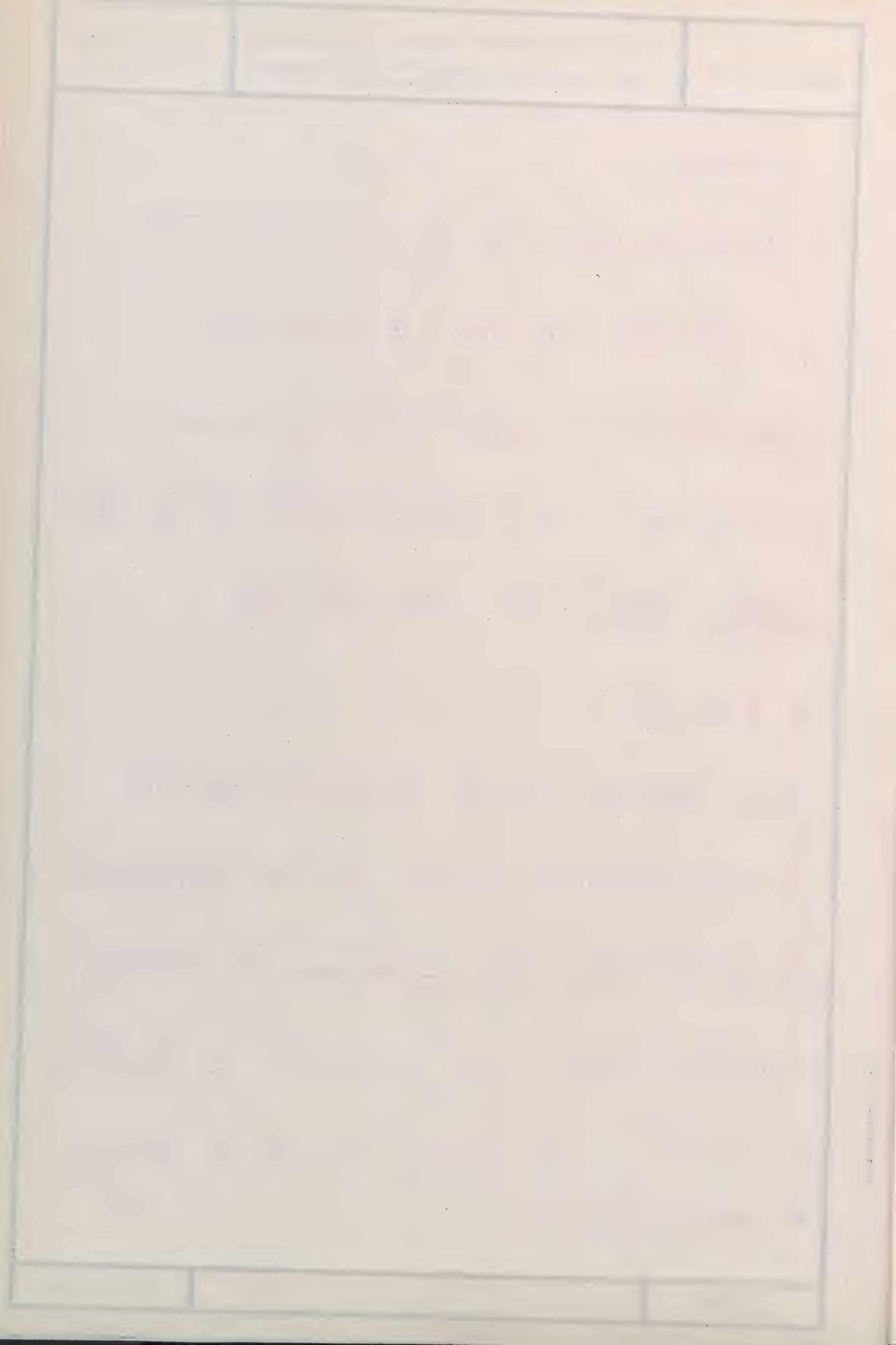
y finalmente

$$D = (5+2\sqrt{5})\sqrt{6(25+11\sqrt{5})} \times \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})(25+20+20\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{6(25+11\sqrt{5})(45+20\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{9}\sqrt{30(25+11\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})} = \frac{1}{9}\sqrt{90(225+99\sqrt{5}+100\sqrt{5}+220)} =$$

$= \frac{1}{3}\sqrt{10(445+199\sqrt{5})} =$ (199 es primo y $445^2 - (199\sqrt{5})^2 = 20$; $4^2 < 20 < 5^2$) De los valores anteriores se deduce la expresión final:



$$V_2 = \left(A + D - (B+C)\right)a^3 = \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{85\sqrt{3} + 37\sqrt{15}}{9} + \frac{35\sqrt{3} + 15\sqrt{15}}{3} \right) a^3 = \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} \right.\right.$$

$$\left. - \frac{85\sqrt{3} + 37\sqrt{15} + 105\sqrt{3} + 45\sqrt{15}}{9} \right) a^3 =$$

$$\boxed{= \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \frac{190\sqrt{3} + 82\sqrt{15}}{9} \right) a^3}$$

El volumen total V del poliedro estudiado, será pues

$$V = V_1 + V_2 = \frac{10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9} a^3 + \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{190\sqrt{3} + 82\sqrt{15}}{9} \right) a^3 = \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} + \right.$$

$$\left. - \frac{10(18\sqrt{3} + 8\sqrt{15})}{9} \right) a^3$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{10\sqrt{3} + 2\sqrt{15}}{9} a^3 + \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{190\sqrt{3} + 82\sqrt{15}}{9} \right) a^3 = \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{10\sqrt{3} + 2\sqrt{15} - 190\sqrt{3} - 82\sqrt{15}}{9} \right) a^3 = \left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \right.$$



$$+ \frac{\sqrt{10\,(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \frac{180\sqrt{3} + 80\sqrt{15}}{9}\Bigg) a^3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{10\,(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10\,(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \frac{10\,(18\sqrt{3} + 8\sqrt{15})}{9} \right) a^3$$

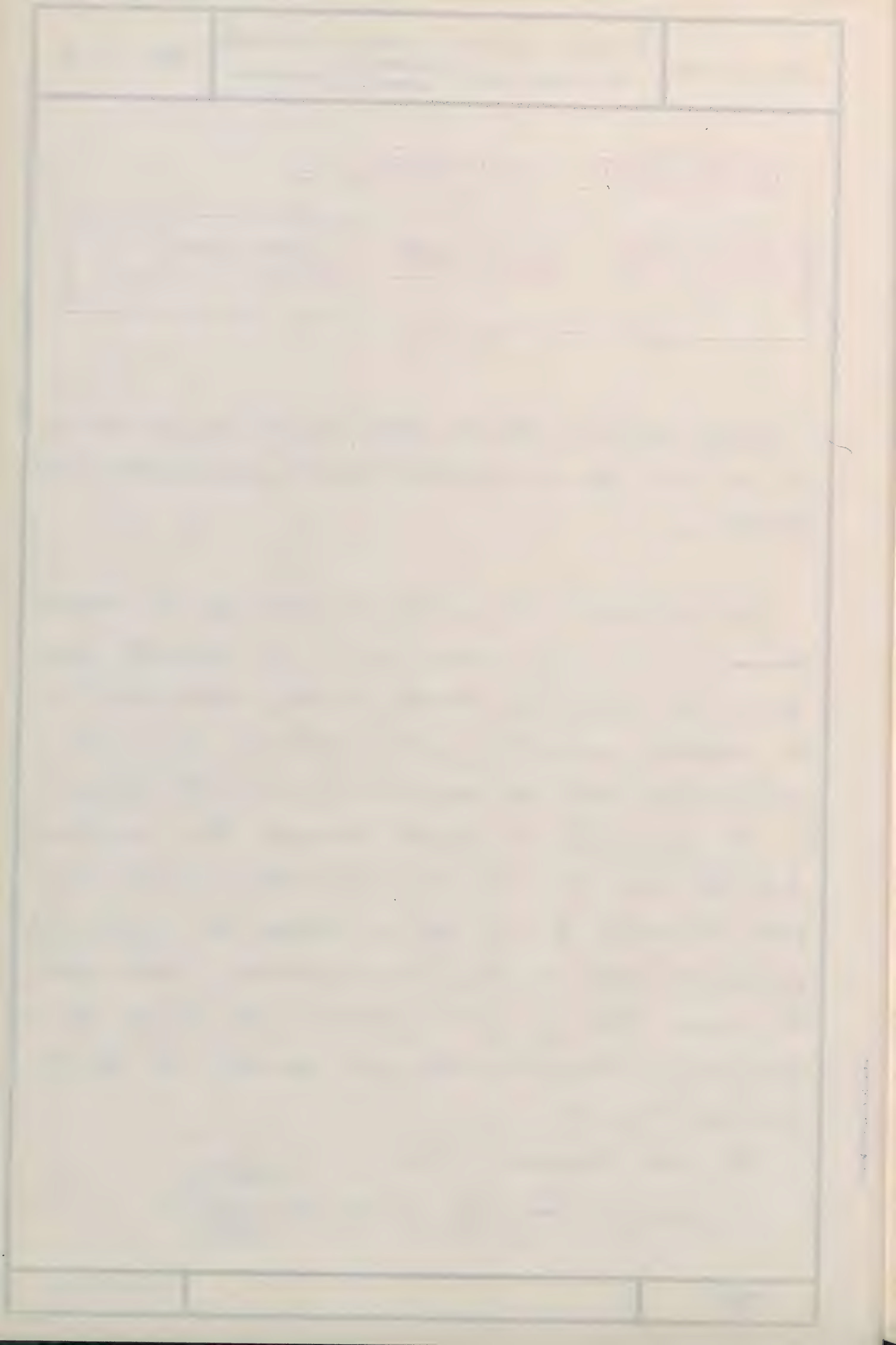
Angulo rectilíneo "2θ" del diedro formado en la intersección de una cara del dodecaedro, con la correspondiente del icosaedro

En la lámina 24, podemos comprobar que el ángulo formado por la cara 21-22-23-24-25 del dodecaedro regular, y la 1-5-6 del icosaedro regular, viene dado en su verdadera magnitud en la proyección en I. ya que ambas caras son perpendiculares a dicho plano I.

Por consiguiente, el ángulo buscado 2θ es suplementario del que forma la cara triangular 1-5-6 con el plano horizontal II, el cual se deduce de la pirámide pentagonal que se forma en el vértice 1 del icosaedro, cuya altura $\underline{g}$ y la apotema $\underline{h}$ de su base son catetos de un triángulo rectángulo conocido (ver lám. 5, fórmulas 50 y 51)

Así pues, tendremos que

$$2\theta = \pi - \text{arc tg}\, \frac{g}{h} = \pi - \text{arc. tg}\, \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_{20}} =$$



$= \pi - \text{arc. tg}\,(3-\sqrt{5})$

Desarrollo del cálculo anterior: $\text{tg}\,\frac{g}{h} = \text{tg}\,\dfrac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; l_{20}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_{20}} =$

$= \text{tg}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} : \frac{5+2\sqrt{5}}{20}} = \text{tg}\sqrt{2\,(5-\sqrt{5}) : (5+2\sqrt{5})} = \text{tg}\sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5+2\sqrt{5}}} =$

$= \text{tg}\sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}{25-20}} = \text{tg}\sqrt{\frac{2\,(25-5\sqrt{5}-10\sqrt{5}+10)}{5}} = \text{tg}\sqrt{\frac{2\,(35-15\sqrt{5})}{5}} =$

$= \text{tg}\sqrt{2\,(7-3\sqrt{5})} =$ (siendo $7^2 - (3\sqrt{5})^2 = 2^2$)

$= \text{tg}\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \boxed{\text{tg}\,(3-\sqrt{5})}$

El cálculo numérico de "2θ" es el siguiente:

$2\theta = \pi - \text{arc tg}\,(3-\sqrt{5})$ $\qquad 3-\sqrt{5} \cong 0{,}76\,39\,32$

$\lg 0{,}76\,39\,32 = \bar{1},88\,30\,547$ $\qquad \text{arc. tg}\,(3-\sqrt{5}) = 37^\circ\, 22'\, 38{,}5''$

$2\theta = 180^\circ - 37^\circ\, 22'\, 38{,}5'' = 142^\circ\, 37'\, 21{,}5''$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_{12}$" del diedro del dodecaedro

(ver lám. 4, fórm. 34) $\qquad 2\varphi_{12} = 116^\circ\, 33'\, 54{,}2''$

$\text{sen}\,\varphi_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = 0{,}85\,06\,51\ldots$



Angulo rectilineo "2 φ_{20}" del diedro del icosaedro

(ver lám. 5, fórm. 47) $2\ "\varphi_{20}" = 138°\ 11'\ 22{,}8''$

$$\operatorname{sen} \varphi_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} = 0{,}93\ 41\ 72\ldots$$

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
226 l_{12}	$\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, a$	$0{,}71\ 36\ 44\ldots a$
227 l_{20}	$\frac{\sqrt{10 \times (5-\sqrt{5})}}{5}\, a$	$1{,}05\ 14\ 62\ldots a$
228 f	$\frac{3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (3\sqrt{3} + \sqrt{15})}{6}\, a$	$0{,}39\ 05\ 90\ldots a$
229 i	$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{30}}\right) a$	$0{,}33\ 22\ 56\ldots a$
230 h	$\left(1 - \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\right) a$	$0{,}20\ 53\ 46\ldots a$
231 S	$5\left(18\sqrt{3} + 6\sqrt{15} - \sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})} - 3\sqrt{2(25 + 11\sqrt{5})}\right) a^2$	$11{,}32\ 85\ 41\ldots a^2$
232 V	$\left(\frac{\sqrt{10(745 + 331\sqrt{5})}}{3} + \frac{\sqrt{10(445 + 199\sqrt{5})}}{3} - \frac{10(18\sqrt{3} + 8\sqrt{15})}{9}\right) a^3$	$3{,}00\ 07\ 58\ldots a^3$
233 2Θ	$2\Theta = \pi - \operatorname{arc\,tg}(3 - \sqrt{5})$	$142°\ 37'\ 21{,}5''$
234 $2\varphi_{12}$	$\operatorname{sen} \varphi_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{sen} \varphi_{12} = 0{,}85\ 06\ 51$ $2\varphi_{12} = 116°\ 33'\ 54{,}2''$
235 $2\varphi_{20}$	$\operatorname{sen} \varphi_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6}$	$\operatorname{sen} \varphi_{20} = 0{,}93\ 41\ 72$ $2\varphi_{20} = 138°\ 11'\ 22{,}8''$

UNE A4 210 X 297



Lámina 24	Poliedros regulares convexos conjugados Conjugado del { DODECAEDRO / ICOSAEDRO } REGULAR	Hoja nº 20

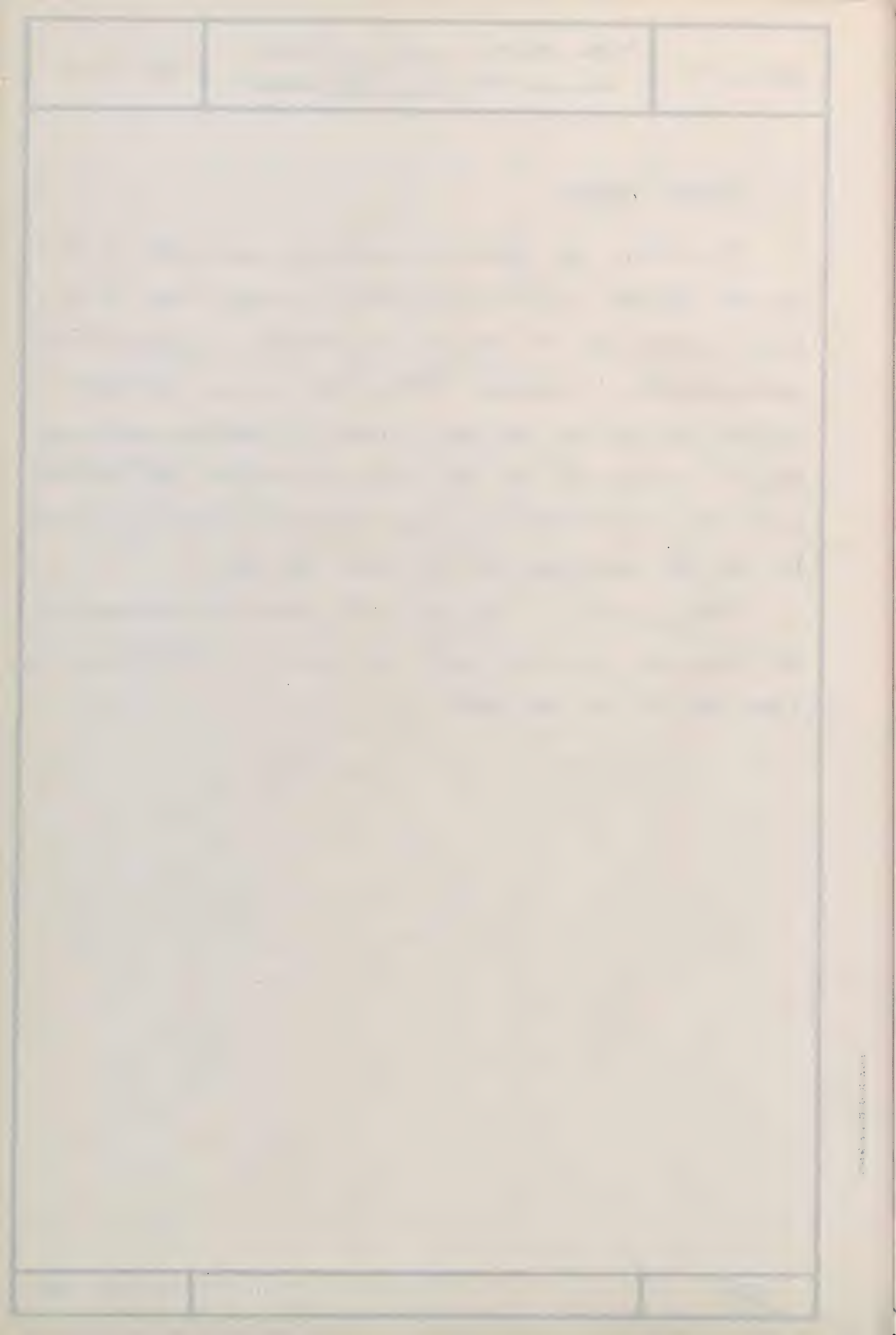
FIGURA CORPÓREA

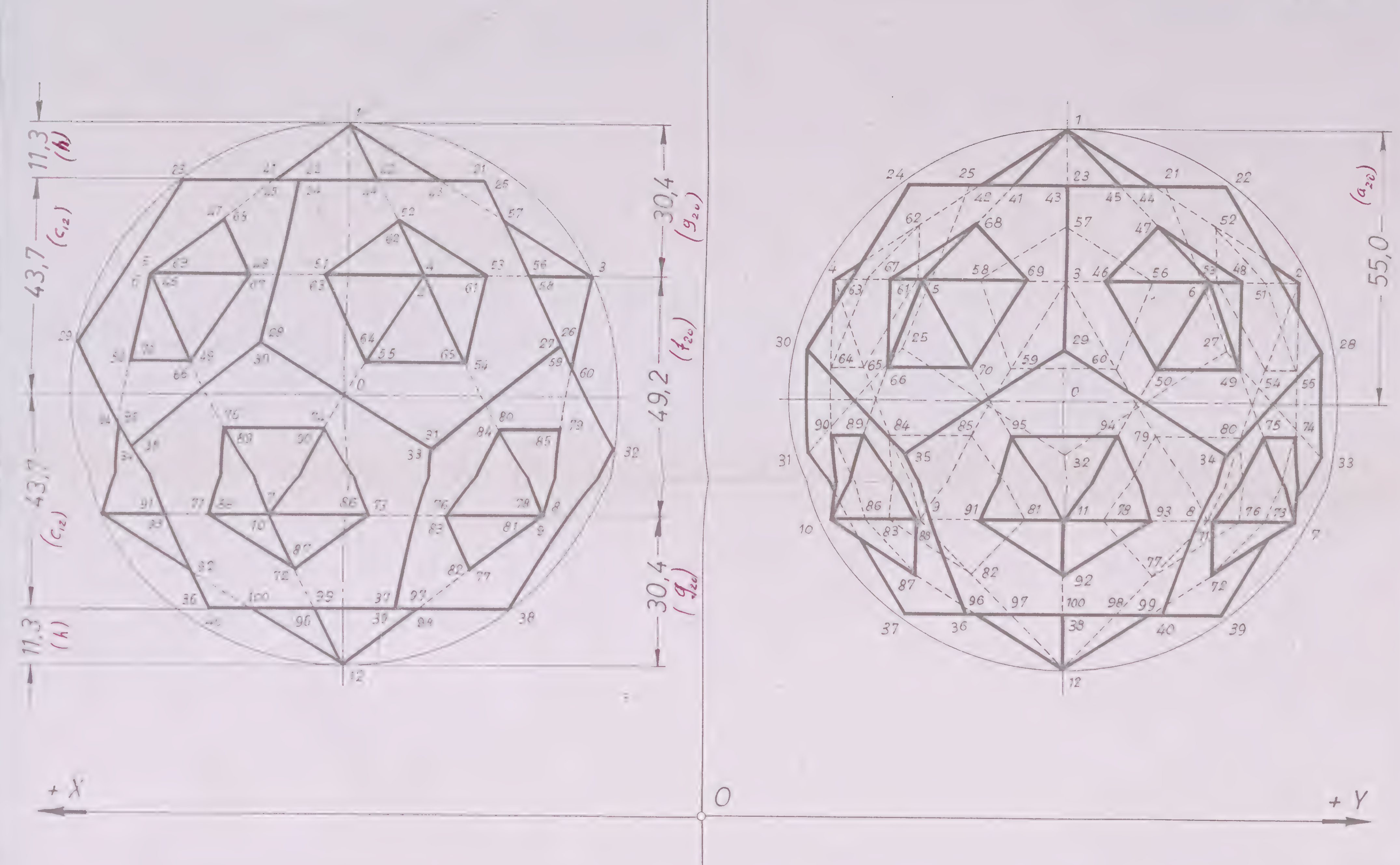
Para obtener esta figura se construye previamente el dodecaedro regular de 39,3 mm de lado, en cuyas caras se dibujará previamente la base de la pirámide complementaria correspondiente al icosaedro. Dicha base es un pentágono regular de 21,5 mm de lado, siendo el radio de su circunferencia circunscrita de 18,3 mm.; este pentágono está colocado en la cara del dodecaedro con su centro coincidente y sus vértices en las mediatrices de los lados de ésta.

Posteriormente se acoplarán a las caras del dodecaedro las doce pirámides formadas cada una por cinco triángulos equiláteros de 21.5 mm de lado.

UNE A4 210 X 297

		16 - 5 - 73





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el poliedro resultante de la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares recíprocamente conjugados y de esfera circunscrita común, siendo los vértices de cada uno de ellos las proyecciones desde el centro de dicha esfera, y sobre ésta, de los centros de las caras del otro.

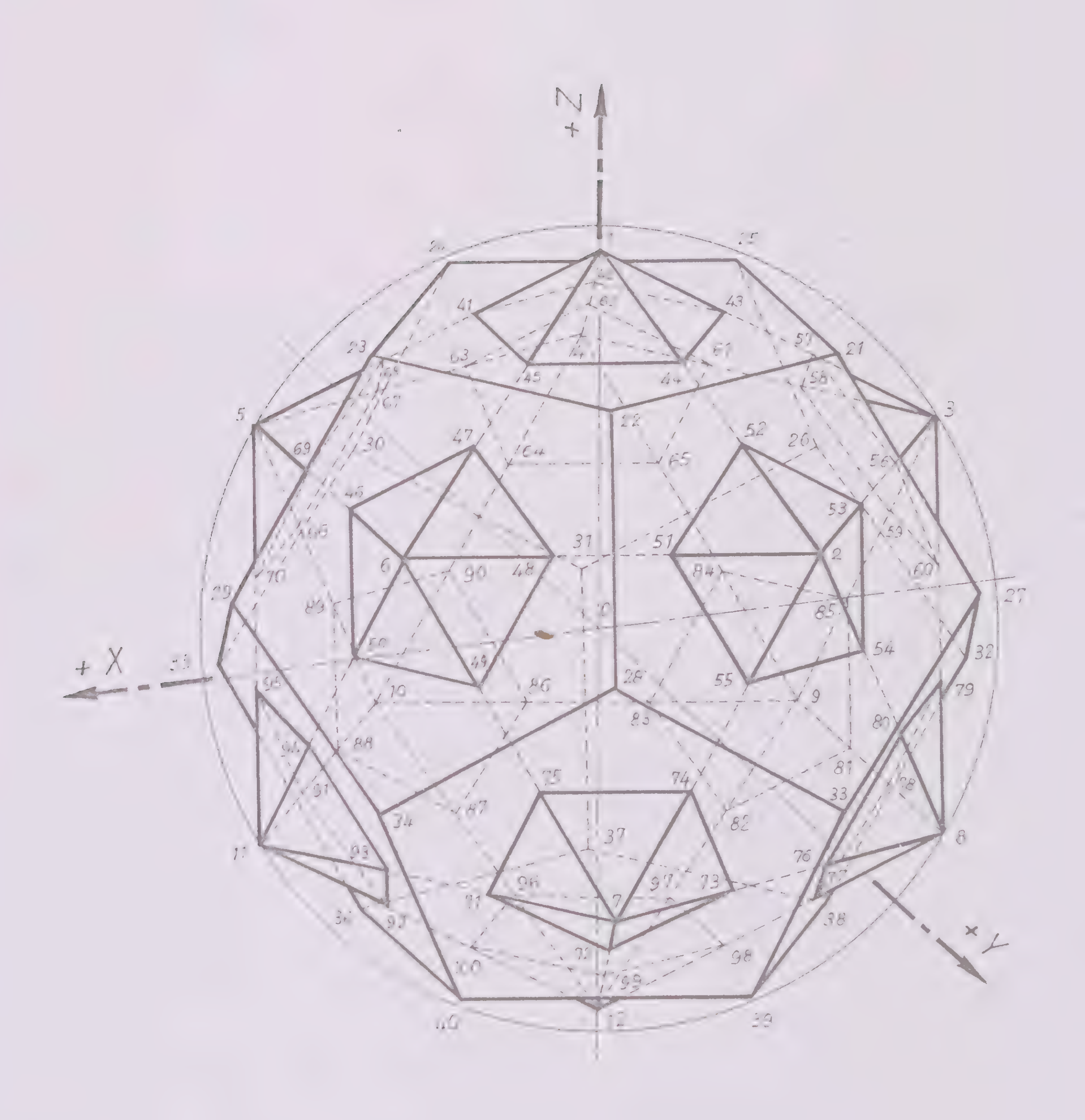
Las coordenadas del centro de la esfera son: O(72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Icosaedro .... 1 al 12
Dodecaedro .... 21 al 40
Puntos de intersección ...... 41 al 100

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 24 / Curso 19 -19



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 25	POLIEDROS DERIVADOS DE LOS REGULARES A) Por proyección de los centros de caras	25

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un hexaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma es 55 mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

a_4 = 55 mm.

UNE A4 210 X 297

3 - 6 - 72



CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 25 a 30 vamos a realizar el estudio y representación de los poliedros derivados de los cinco regulares convexos, siguiendo la ley de formación que se expresa en el enunciado para el derivado del tetraedro.

Esta ley de formación, común para todos ellos, consiste en obtener un poliedro de otro regular dado según el proceso siguiente:

1°) Trazar la esfera circunscrita al poliedro regular dado.

2°) Proyectar desde el centro de éste, y sobre su esfera circunscrita, los centros de los polígonos de todas las caras de dicho poliedro regular dado.

3°) Unir los puntos obtenidos en el proceso 2°, con los vértices del polígono de su cara correspondiente.

De la ley de formación expuesta, se deducen las siguientes propiedades comunes a los cinco poliedros derivados:

a) Todas las caras del poliedro derivado son iguales, y tienen forma de triángulos isósceles o rombos.



En efecto, al unir los puntos obtenidos por el proceso 2º, con los vértices del polígono de cada cara del poliedro regular dado, se forma en cada una de ellas una pirámide recta regular de tantas caras laterales como lados tenga dicho polígono. Todas las pirámides serán iguales y por consiguiente todas las caras del poliedro derivado serán a su vez iguales.

Existe la posibilidad de que las caras adyacentes de dos pirámides contiguas con arista común en una arista del poliedro regular dado, puedan o no estar en un mismo plano. En el primer caso, cada dos caras triangulares contiguas sobre la arista del poliedro regular, se convierten en una sola cara con la forma de rombo, ya que sus cuatro lados serían iguales.

Si llamamos C_n', V_n' y A_n' el número de caras, vértices y aristas del poliedro regular dado y C, V y A los del poliedro derivado de igual esfera circunscrita, se verificará, bajo el supuesto de ser todas sus caras triangulares, que

$$C = n\,C_n' \qquad [1]$$

puesto que cada cara del poliedro regular dado, es base de una pirámide recta regular de "n" caras laterales, siendo n el número de lados del polígono de su base.

También tendremos que



$$V = V'_n + C'_n \qquad [2]$$

ya que a más de los vértices del poliedro dado, se originan nuevos vértices, uno por cada cara de dicho poliedro.

Y finalmente se verificará que

$$A = A'_n + n\,C'_n \qquad [3]$$

puesto que a más de las aristas del poliedro dado, se originan nuevas aristas en las caras laterales de las pirámides que se forman en cada cara del mismo, cuyo número es igual al de lados del polígono base de dicha pirámide.

Sumando las igualdades [1] y [2], y restando la [3], tendremos

$$C + V - A = n\,C'_n + V'_n + C'_n - A'_n - n\,C'_n = C'_n + V'_n - A'_n$$

y aplicando el teorema de Euler al poliedro convexo dado, se verificará que

$$C'_n + V'_n - A'_n = 2$$

por lo que en el poliedro derivado también se verificará dicho teorema, siendo pues

$$C + V - A = 2$$

UNE A4 210 X 297



aún cuando este poliedro derivado no sea convexo, como veremos ocurre en algunos casos.

b) <u>Existe una esfera, concéntrica con la circunscrita al poliedro derivado, que es tangente en su punto medio a todas las aristas de igual longitud</u>

En efecto, según la ley de formación de estos poliedros derivados, todos los vértices del mismo se encuentran en una misma esfera que es la circunscrita al poliedro regular dado, y por consiguiente también circunscrita al poliedro derivado.

Cualquier arista de este poliedro tiene sus extremos A y B en dicha esfera de radio <u>a</u> (fig. 1). y centro <u>O</u>. Si unimos <u>A</u> y <u>B</u> con <u>O</u>, el triángulo <u>AOB</u> será isósceles y el punto medio <u>C</u> de <u>AB</u> será el pié de la perpendicular trazada a <u>AB</u> desde O (altura del triángulo <u>AOB</u>, correspondiente al lado <u>AB</u>)

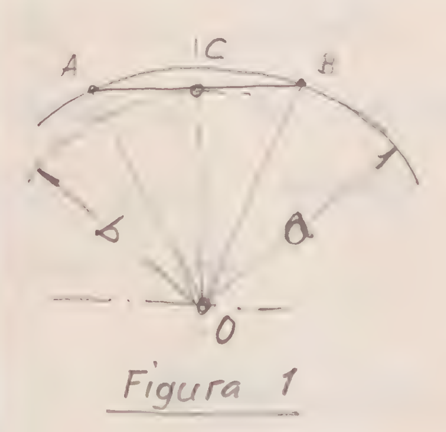


Figura 1

Si consideramos que la arista <u>AB</u> se mueve sobre la esfera de forma que sus extremos estén siempre sobre ella, el punto <u>C</u> equidistará siempre de O la magnitud <u>OC</u> = b y por consiguiente el l.g. de sus infinitas posiciones será una es-



fera de centro O y radio b.

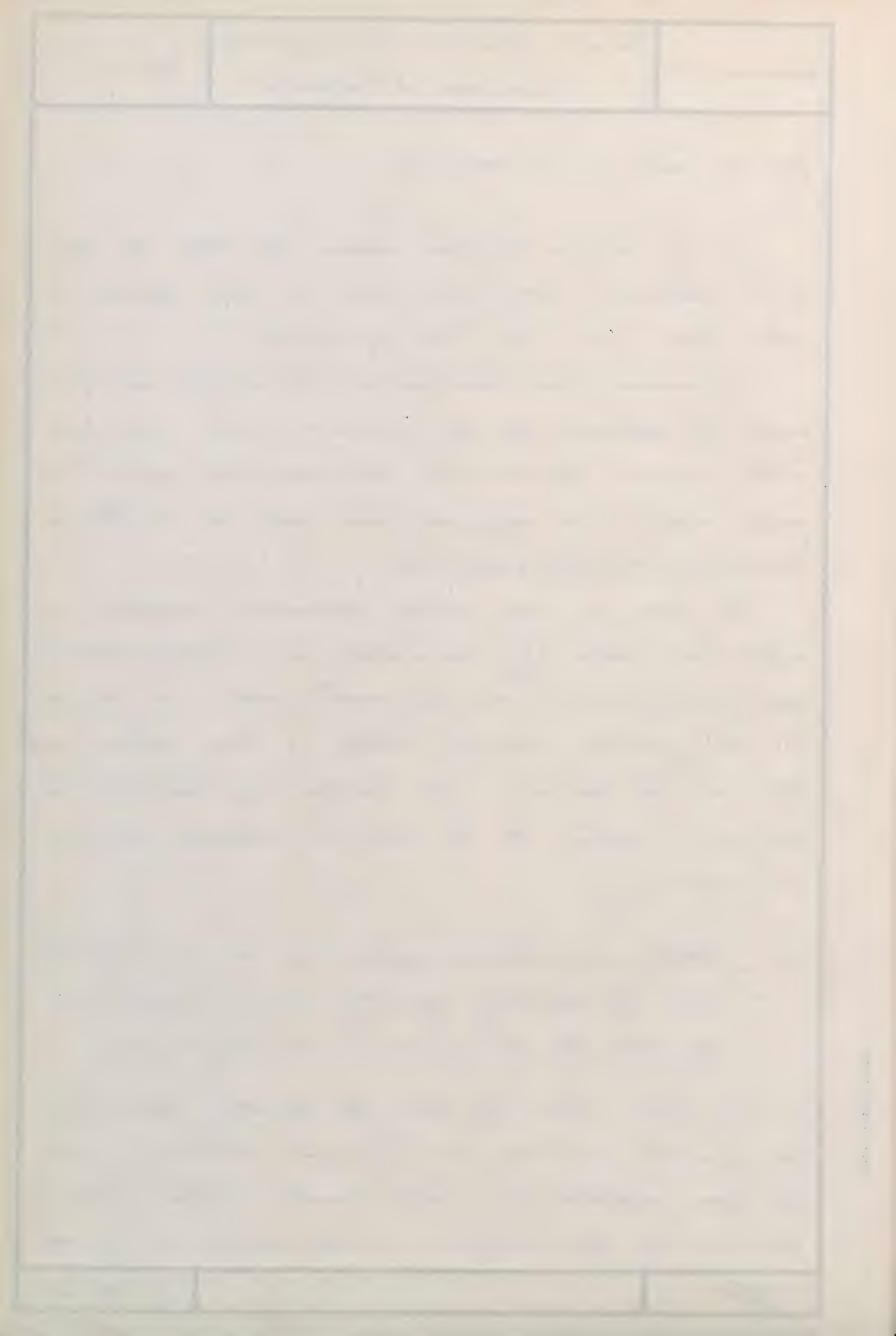
En todo poliedro derivado existen dos clases de aristas de diferentes magnitudes entre sí, pero iguales en cada clase, que son las siguientes:

La primera clase comprenden las aristas que forman el contorno de cada pirámide recta cuya base es el polígono regular de cada cara del poliedro regular dado; la segunda clase son las aristas laterales de dichas pirámides.

Así pues, en todo poliedro derivado, existirá una esfera de radio b_1, concéntrica con la circunscrita, que será tangente en su punto medio a las aristas del poliedro regular dado, y otra esfera análoga a la anterior, de radio b_2 tangente en su punto medio a las aristas laterales de la pirámide.

c) Existe una esfera, concéntrica con la circunscrita al poliedro derivado, que es tangente a las caras de éste (inscrita en el mismo)

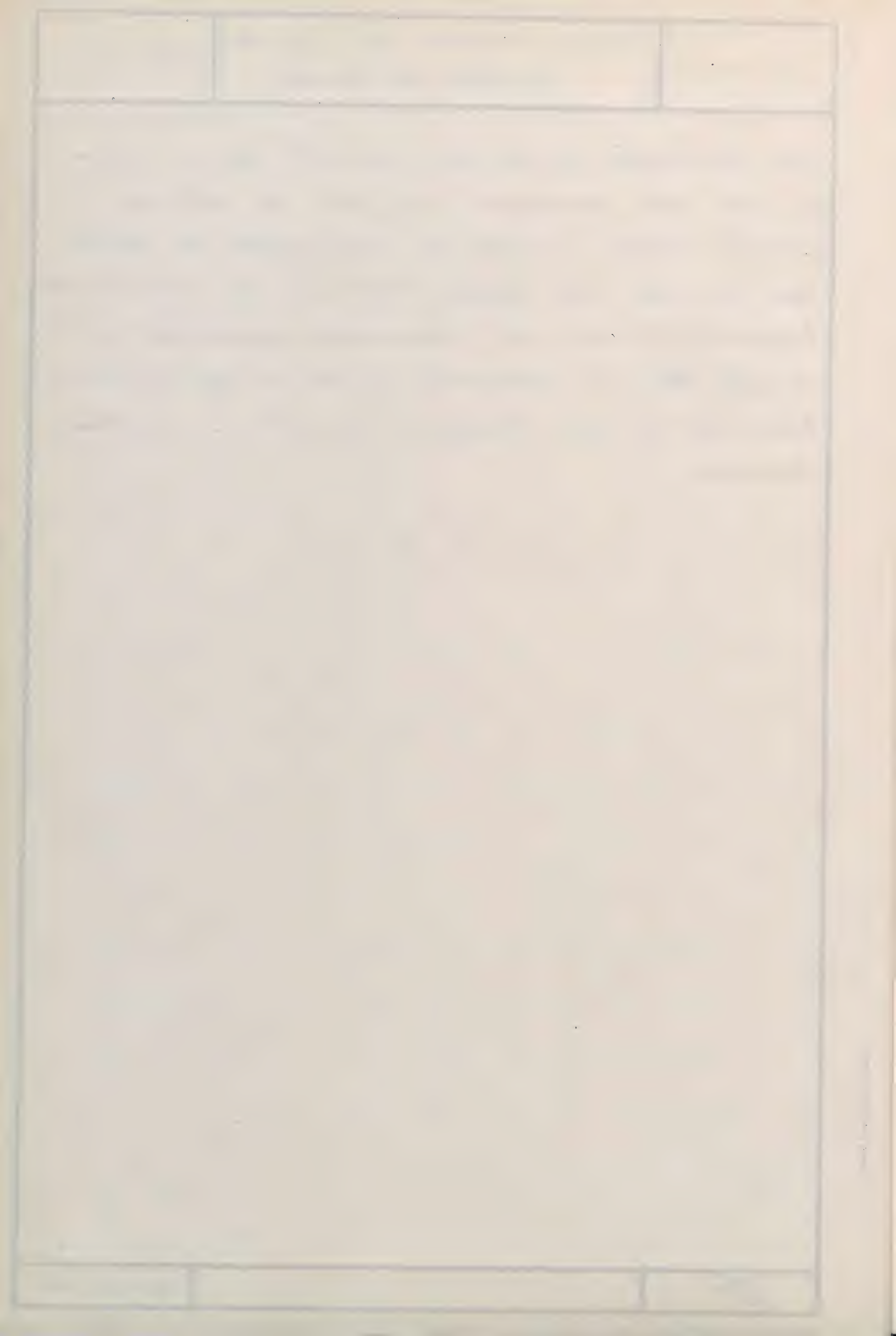
En efecto, todas las caras del poliedro derivado son iguales, pudiendo ser triángulos isósceles o rombos (ver propiedad a). Ambas figuras tienen al menos un eje de simetría y sus vértices en la esfe-



ra circunscrita, lo cual nos demuestra que al aplicar a una cara cualquiera un giro con centro en O, podemos obtener siempre la superposición de dicha cara con otra del poliedro derivado. El ortocentro del triángulo de cada cara permanecerá equidistante de O durante todo el movimiento y será el punto de contacto de la esfera tangente inscrita en el poliedro derivado.

(sigue en hoja 7)

UNE A4 210 X 297



CALCULO DE LOS ANGULOS RECTILÍNEOS DE LOS DIEDROS DE LAS CARAS DEL POLIEDRO DERIVADO Y LONGITUDES FUNDAMENTALES

En el poliedro derivado sólo existen dos clases de diedros, iguales entre sí en cada clase; éstas son las siguientes:

a) Diedros que se forman en dos caras triangulares contiguas con arista común a las del poliedro regular dado, y

b) Diedros que se forman en dos caras triangulares contiguas en las aristas de las pirámides rectas regulares que se forman en cada cara di dicho poliedro regular dado.

Para el desarrollo de los cálculos anteriores, emplearemos la siguiente nomenclatura, análoga a la de las láminas anteriores:

n = Número de caras del poliedro regular dado

a_n = Radio de la esfera circunscrita a dicho poliedro.

l_n = Lado del poliedro regular dado

b_1 = Radio de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado

UNE A4 210 X 297



Lámina 25	Poliedros derivados de los regulares Derivado del tetraedro	Hoja n.º 8

(15) b_2 = Radio de esfera tangente a las aristas (laterales) de las pirámides rectas cuyas bases son caras del mismo.

(5) c_n = Radio de la esfera inscrita en el poliedro regular dado

(16) c_1 = Radio de la esfera inscrita en el poliedro derivado.

(6) d_n = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del poliedro dado.

(7) k_n = Apotema del polígono regular del mismo, o también radio de su circunferencia circunscrita.

(8) $2\varphi_n$ = Diedro del poliedro regular dado

(9) $2\alpha_n$ = Diedro de dos caras del poliedro derivado en la arista del poliedro dado.

(14) β_n = Diedro formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

(13) $2\gamma_n$ = Diedro de dos caras de la pirámide.

(10) p = Altura de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del mismo.

(11) q = Arista lateral de dicha pirámide o lado igual de una cara triangular isósceles

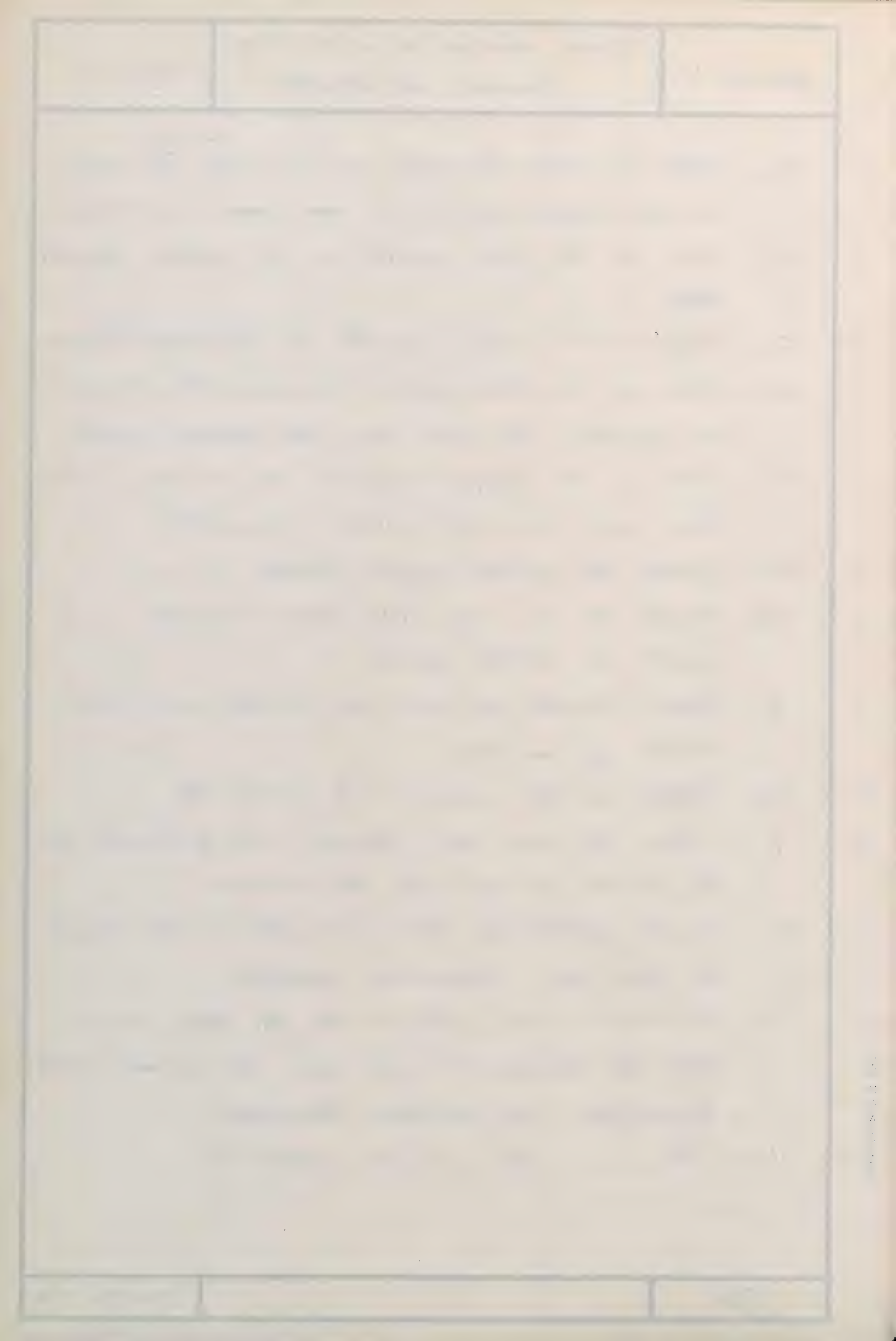
(12) t = Distancia entre extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del poliedro dado.

(17) S = Superficie del poliedro derivado

(18) V = Volumen del poliedro derivado

UNE A4 210 X 297

[signature]		22 - 6 - 72



a) Cálculo del diedro que forman dos caras triangulares del poliedro derivado, con arista común a la del poliedro regular dado.

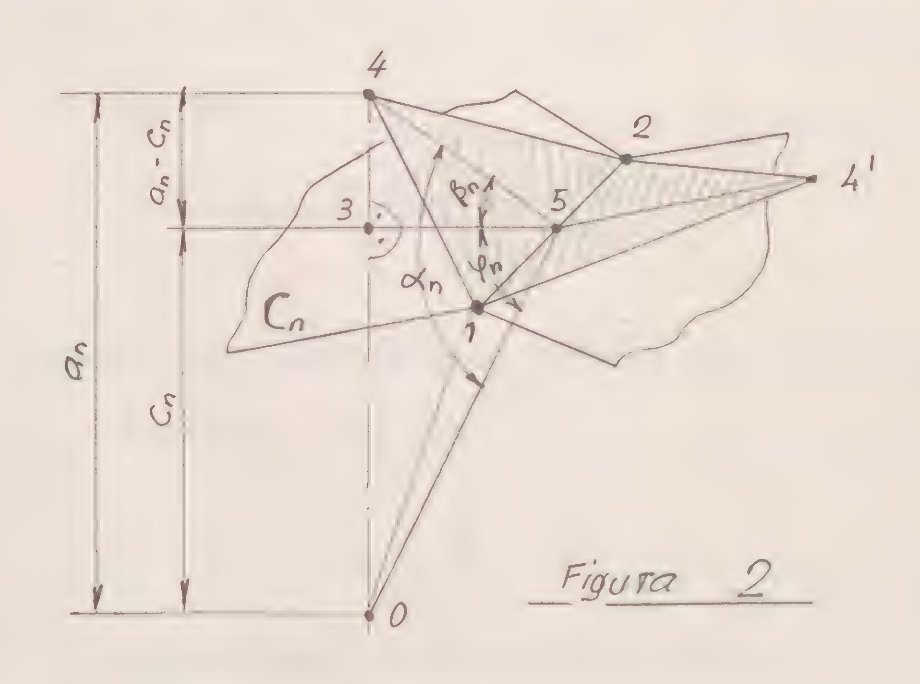


Figura 2

Sea (fig. 2) 1-2 una arista del poliedro regular dado, 0 su centro y 3 el centro de una cara C_n de dicho poliedro.

El punto 4, obtenido al proyectar desde 0 y sobre (sigue en hoja 10)



la esfera circunscrita, el centro 3 de la cara C_n, será el vértice de una de las pirámides rectas regulares de $\underline{n}$ caras laterales. Sea $\underline{5}$ el punto medio de la arista 1-2, que uniremos 3 y 4, formándose el triángulo 3-4-5, rectángulo en 3. En este triángulo se verificará que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{3\text{-}4}{3\text{-}5} = \frac{a_n - c_n}{k_n}$$

En el triángulo 0-3-5, también rectángulo en 3, se verificará a su vez

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{3\text{-}0}{3\text{-}5} = \frac{c_n}{k_n}$$

La suma de los ángulos φ_n y β, será igual al ángulo α_n buscado, o sea

$$\alpha_n = \varphi_n + \beta$$

y de las expresiones anteriores se obtiene

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} (\varphi_n + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_n + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \varphi_n \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{c_n}{k_n} + \frac{a_n - c_n}{k_n}}{1 - \frac{c_n}{k_n} \times \frac{a_n - c_n}{k_n}} =$$

$$= \frac{a_n \, k_n}{k^2 - a_n c_n + c_n^2} \qquad [4]$$

con cuyo valor se puede determinar, en cada caso particular, el del ángulo α_n.

Este ángulo define la característica espacial del



poliedro derivado, el cual será cóncavo o convexo según sea α_n menor o mayor de un recto.

En el caso particular de que α_n sea recto, el poliedro derivado tendrá dos caras laterales en un mismo plano, es decir, se transformarán éstas en un paralelógramo de lados iguales (rombo). El número de caras de este poliedro determinado por la expresión [1], se reducirá a la mitad; el de vértices por la expresión [2] será el mismo y el de aristas por la expresión [3], quedará reducida a $A_n = n\,C'_n$, por desaparecer las aristas A'_n (son diagonales del rombo).

b) Cálculo del diedro que se forma en dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta regular.

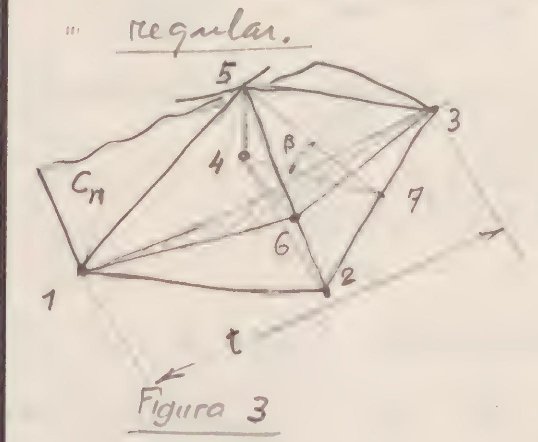


Figura 3

Sea (fig. 3) C_n una cara del poliedro regular dado, de n lados; 4 el centro de la misma y 5 el vértice de la pirámide recta, regular de n caras laterales que se forma en C_n. Dos lados consecutivos 1-2 y 2-3 de C_n unidos sus extremos con 5, nos determinarán dos caras laterales contiguas 1-5-2 y 2-5-3, de arista común 5-2.



El rectilíneo de este diedro se puede obtener por intersección de un plano que pasando por los extremos 1 y 3 de los dos lados consecutivos 1-2 y 2-3, sea perpendicular a la arista 5-2.

Sea 6 el punto de intersección de dicho plano con 5-2; uniendo 6 con 1 y 3 se nos formará el triángulo isósceles 1-6-3, cuyo ángulo en 6 será el pedido $2\gamma_n$.

Para obtener su valor, unamos el punto 7, medio del lado 2-3, con el centro 4, formándose el triángulo 5-4-7, rectángulo en 4 por lo que se verificará que

$$p = 5-7 = \sqrt{(4-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{(a_n - c_n)^2 + k_n^2} \qquad [5]$$

Uniendo 4 con 2, se nos formará otro triángulo 5-4-2, también rectángulo en 4, por lo que

$$q = 5-2 = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(a_n - c_n)^2 + d_n^2} \qquad [6]$$

En la cara triangular 5-2-3 se puede determinar el ángulo en $\underline{2}$ en función de $\underline{p}$ y $\underline{q}$ ya que se verificará que

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{5-2-7}\right) = \cos\left(\widehat{2-5-7}\right) = \frac{5-7}{5-2} = \frac{p}{q}$$

En el triángulo 2-6-3, rectángulo en 6, se verificará que



$$\overline{3\cdot6} = (\overline{2\cdot3}) \times \text{sen}\,(\widehat{6\cdot2\cdot3}) = l_n \times \text{sen}\,(\widehat{5\cdot2\cdot7}) = l_n \times \frac{p}{q}$$

Consideremos finalmente el triángulo isósceles 1·6·3, en el que designaremos por t al lado 1·3. El valor del diedro $2\gamma_n$ buscado se deduce de la expresión

$$\text{sen}\,\gamma_n = \cos\,(\widehat{1\cdot3\cdot6}) = \frac{\frac{1}{2}\,(\overline{1\cdot3})}{\overline{3\cdot6}} = \frac{\frac{t}{2}}{l_n \times \frac{p}{q}} = \frac{tq}{2\,l_n\,p} \qquad [7]$$

c) Cálculo del diedro β_n formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

Refiriéndonos a la fig. 3, vemos que

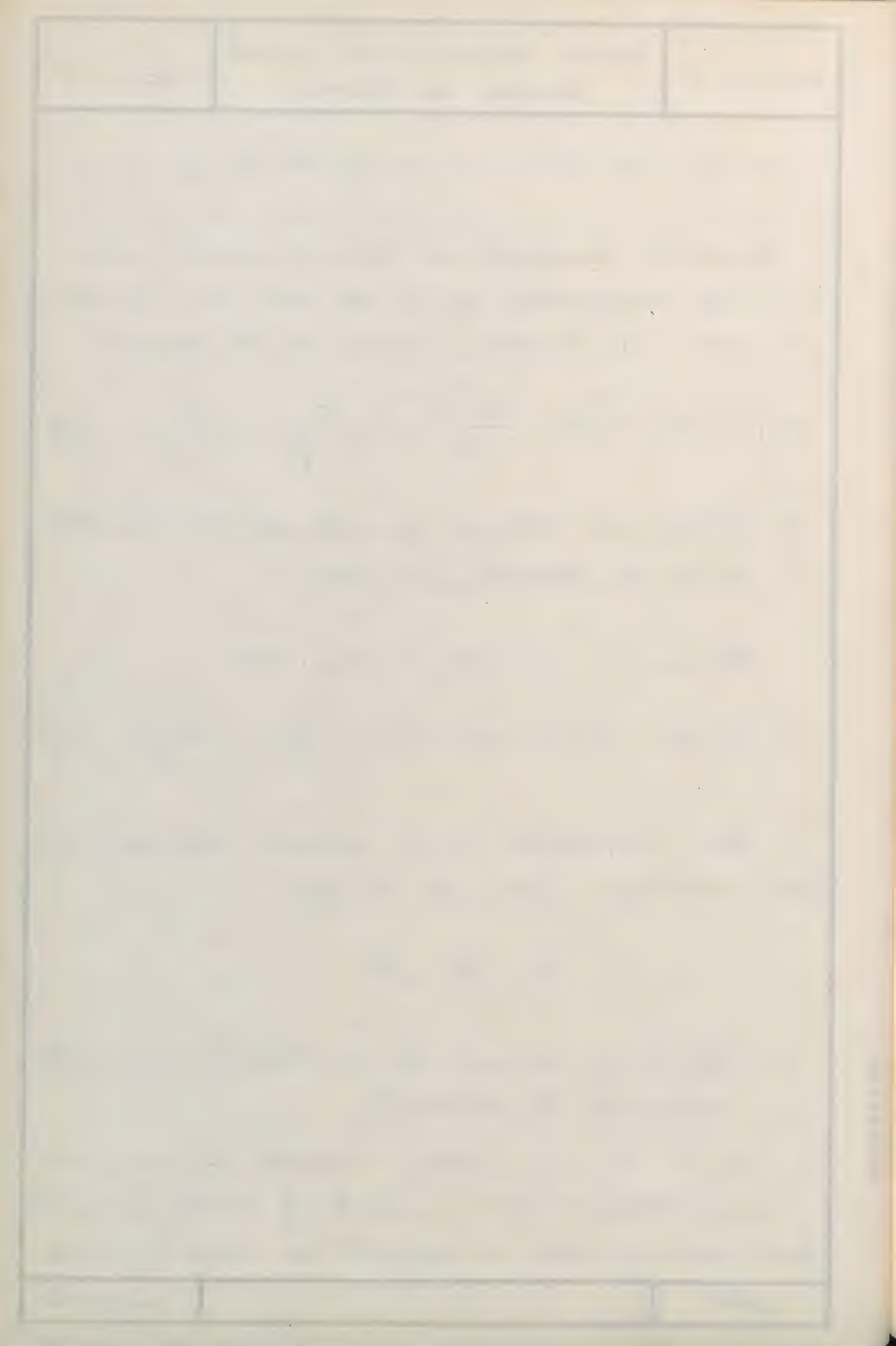
$$\text{sen}\,\beta_n = \text{sen}\,(\widehat{5\cdot7\cdot4}) = \cos\,(\widehat{4\cdot5\cdot7}) = \frac{\overline{4\cdot5}}{\overline{5\cdot7}} = \frac{a_n - c_n}{p} \qquad [8]$$

Como comprobación de los cálculos anteriores, deberá verificarse (ver fig. 2) que

$$\alpha_n = \varphi_n + \beta_n$$

d) Cálculo del radio b_2 de la esfera tangente a las aristas de la pirámide.

En la figura 2 podemos observar que los puntos 1 y 4 extremos de una arista q de la pirámide, están sobre la esfera circunscrita de radio a_n; por



consiguiente el triángulo 1·0·4 será isósceles y su altura desde 0 será perpendicular a la base 4·1 = g en su punto medio. Dicha altura será pues el radio b_2 de la esfera pedida; su valor se deduce del triángulo rectángulo de cateto $\frac{g}{2}$ e hipotenusa a_n, por lo que

$$b_2 = \sqrt{(a_n)^2 - \frac{g^2}{4}} \qquad [9]$$

e) Cálculo del radio c_1 de la esfera inscrita en el poliedro derivado

En la figura 2 podemos observar que si 1-2 es la arista común a dos caras triangulares que forman entre sí el ángulo $2\alpha_n$ los vértices 4, 4' de dichas caras están sobre la esfera circunscrita de radio a_n; por otra parte, en el triángulo 4-0-5 se verifica que 0-5 = b_1, y la altura sobre 4-5 desde 0, o sea el radio c_1 pedido, valdrá

$$c_1 = (0.5) \times \text{sen}\ \alpha_n = b_1\ \text{sen}\ \alpha_n \qquad [10]$$

También podemos obtener el valor anterior operando con una arista común a dos caras laterales de la pirámide (p.e. la 4·1), que forman entre sí el ángulo $2\gamma_n$, por lo que

$$c_1 = b_2\ \text{sen}\ \gamma_n \qquad [10']$$



debiendo verificarse como comprobación que

$$b_1 \cos \alpha_n = b_2 \cos \gamma_n \qquad [11]$$

Resumen final

Las fórmulas [4] a [10] (o 10') junto con la [11] de comprobación, nos permiten calcular los elementos fundamentales de los poliedros derivados de los cinco poliedros regulares, obtenidos por el proceso geométrico detallado al comienzo de este estudio.

Dichas fórmulas son función de los valores $2\varphi_n$, l_n, b_n, c_n, d_n, k_n y t, que deberán determinarse previamente para cada caso particular, en función del radio a_n del poliedro regular aplicado, único dato del problema.

El estudio se completará con el cálculo del área lateral S y volumen V del poliedro derivado.

Este será el proceso a seguir en el estudio de cada uno de los cinco poliedros derivados de los regulares.



DERIVADO DEL TETRAEDRO REGULAR

PROCESO GRÁFICO

Según se deduce de las consideraciones anteriores, para la representación gráfica de cualquier poliedro derivado de uno regular dado según el proceso indicado en el enunciado, basta con representar previamente el poliedro regular dato del ejercicio, y a continuación determinar los vértices de su conjugado inscrito en la misma esfera que aquél, colocado de tal forma que resulten dichos vértices alineados con el centro de una cara y el centro del poliedro.

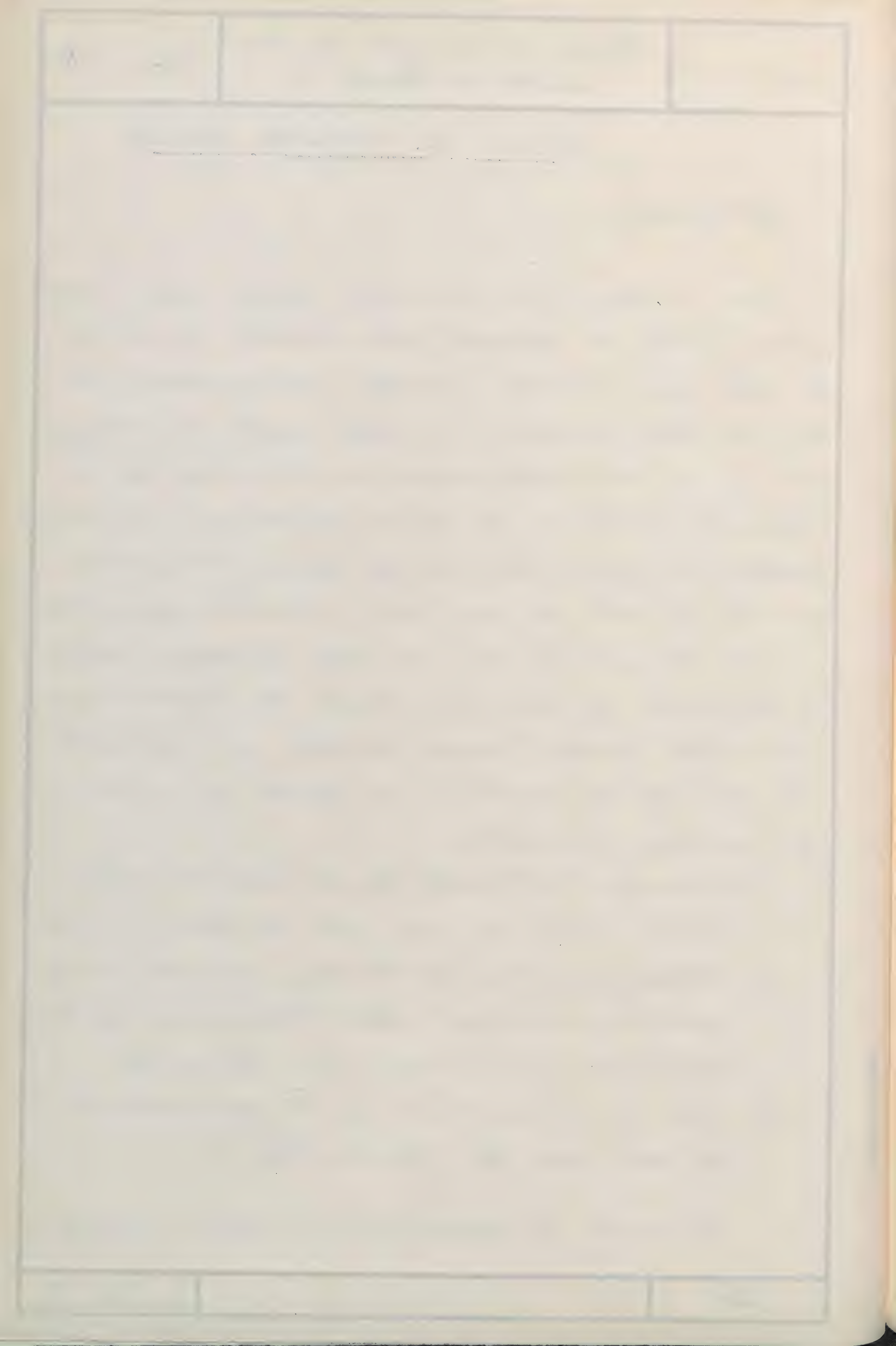
En el caso particular que nos ocupa, el proceso gráfico es inmediato, ya que el conjugado del tetraedro regular es otro tetraedro también regular, y esta representación ha sido ya resuelta en el ejercicio de la lámina 22, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el tetraedro regular dado, de vértices 1 al 4, inscrito en una esfera de 55 mm de radio.

2º Obtener los vértices del tetraedro conjugado 5 al 8, inscrito en la misma esfera (estos vértices se han de corresponder con los 11 al 14 de la lámina 22).

3º Unir los vértices 5 al 8 con los correspondientes de cada cara del tetraedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado,



podemos observar que dos caras triangulares de éste que sean contiguas y coincidentes con una arista del tetraedro dado, están en el mismo plano, por lo que al aplicar la fórmula [1] para la determinación del número de caras del derivado

$$C_4 = 3 \times C'_4 = 3 \times 4 = 12$$

este número se reduce a la mitad, y por lo tanto este poliedro tendrá 6 caras.

Por otra parte tambien podemos deducir de la representación final que los ángulos de estas seis caras, son rectos, y por consiguiente dichas caras (rombos) serán cuadradas.

De ello se deduce que "El poliedro derivado del tetraedro regular, es un exaedro regular"

La demostración de esta propiedad la hacemos a continuación analíticamente en el estudio del proceso gráfico-analítico aplicado a este ejercicio.

PROCESO GRÁFICO- ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos en láminas anteriores, en función del radio a_4 (dato) de la esfera circunscrita al tetraedro regular dado.

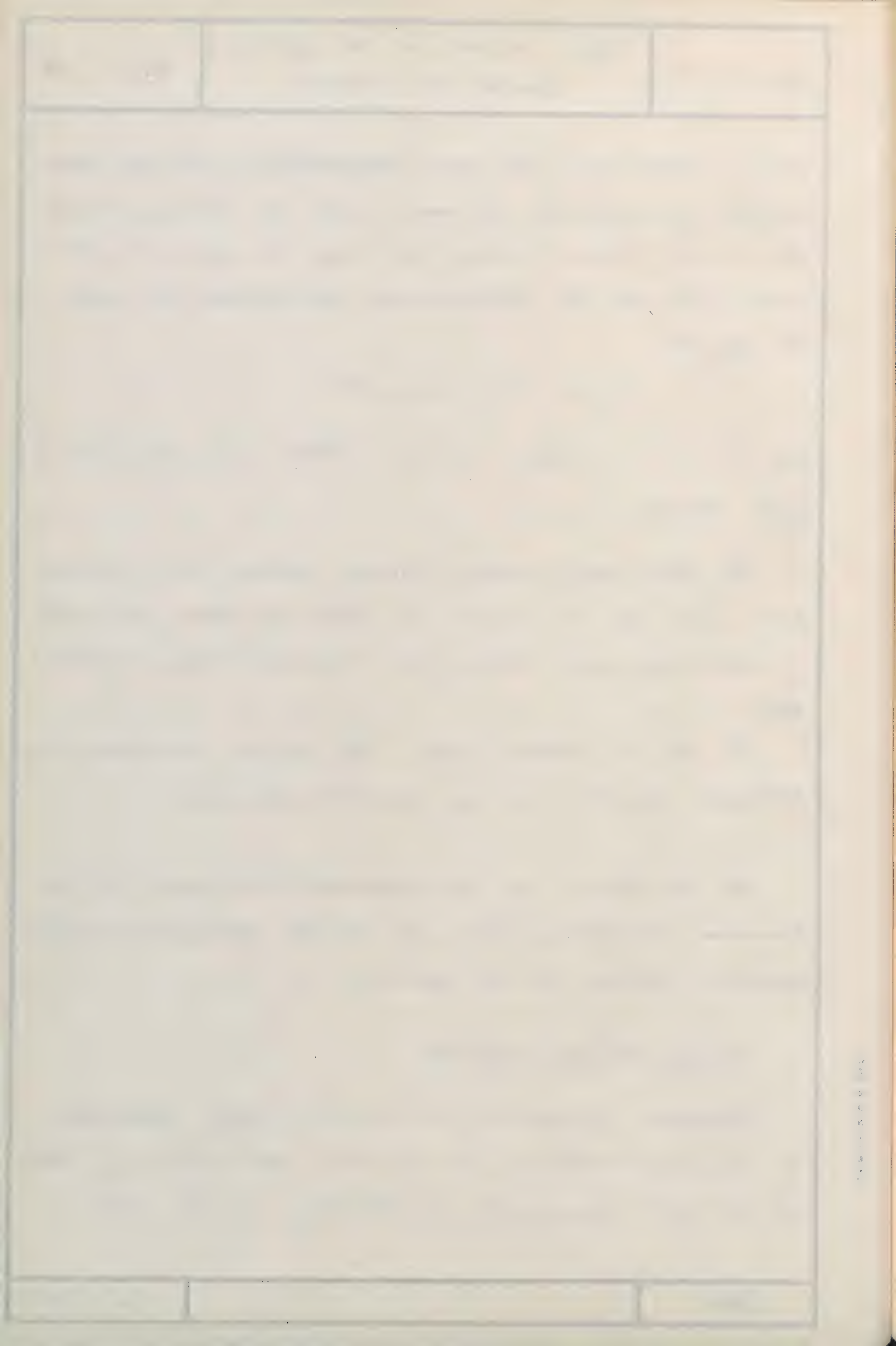


Lámina 25	Poliedros derivados de los regulares Derivado del tetraedro	Hoja nº 18

Número de caras "n" del tetraedro dado

$$n = 4$$

Radio "a_4" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_4" del tetraedro dado

Se deduce de la fórmula 1, lám. 1

$$l_4 = \frac{4}{\sqrt{6}} a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4$$

Radio "c_4" de la esfera inscrita al mismo

Se deduce de la fórmula 3, lám. 1

$$c_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} l_4 = \frac{\sqrt{6}}{12} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 = \frac{1}{3} a_4$$

Radio "d_4" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

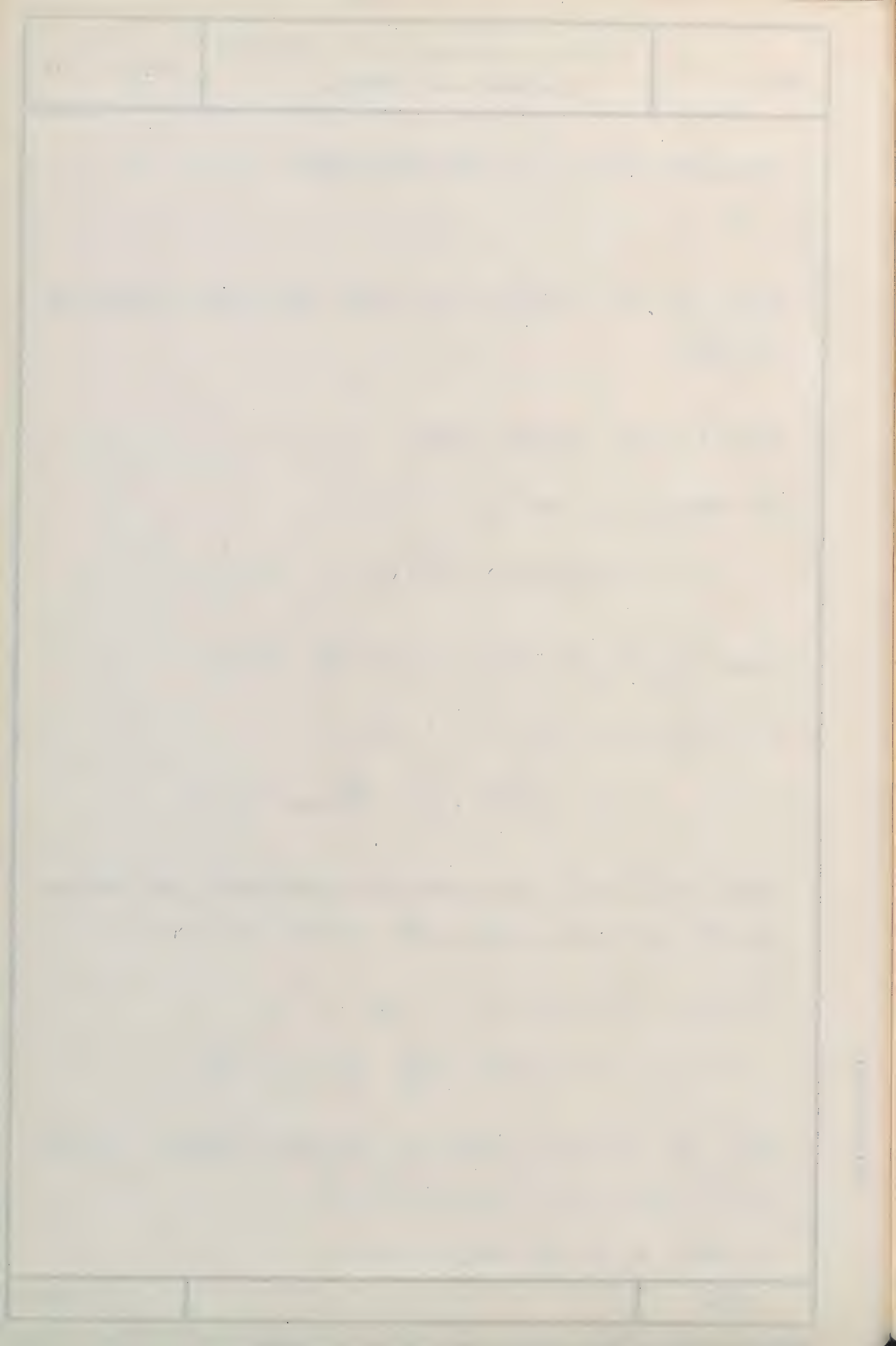
Se deduce de la fórmula 4, lám. 1

$$d_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} l_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3} a_4$$

Radio "k_4" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema)

Se deduce de la fórmula 6, lám. 1

		2 - 6 - 72



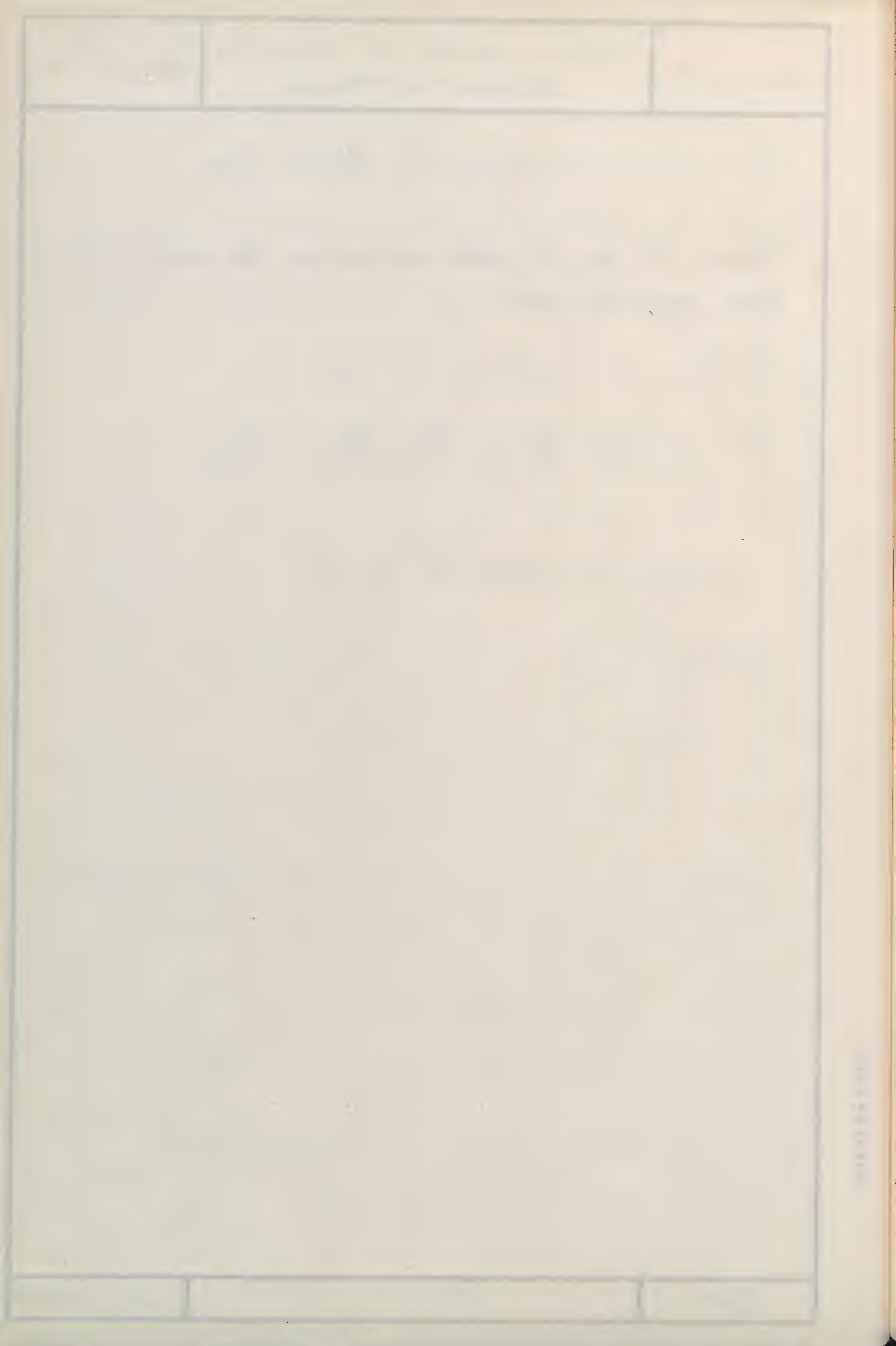
$$k_4 = \frac{\sqrt{3}}{6} \, l_4 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 = \frac{\sqrt{2}}{3} a_4$$

Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado.

Se deduce de la fórmula 2. lám. 1

$$b_1 = b_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} \, l_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_4$$

(sigue en hoja 20)



<u>Angulo rectilíneo "$2\varphi_4$" del diedro del mismo</u>

Se deduce de la fórmula 5, lám. 1

$$\operatorname{sen} \varphi_4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad 2\varphi_4 = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

<u>Angulo rectilíneo "$2\alpha_4$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del tetraedro dado.</u>

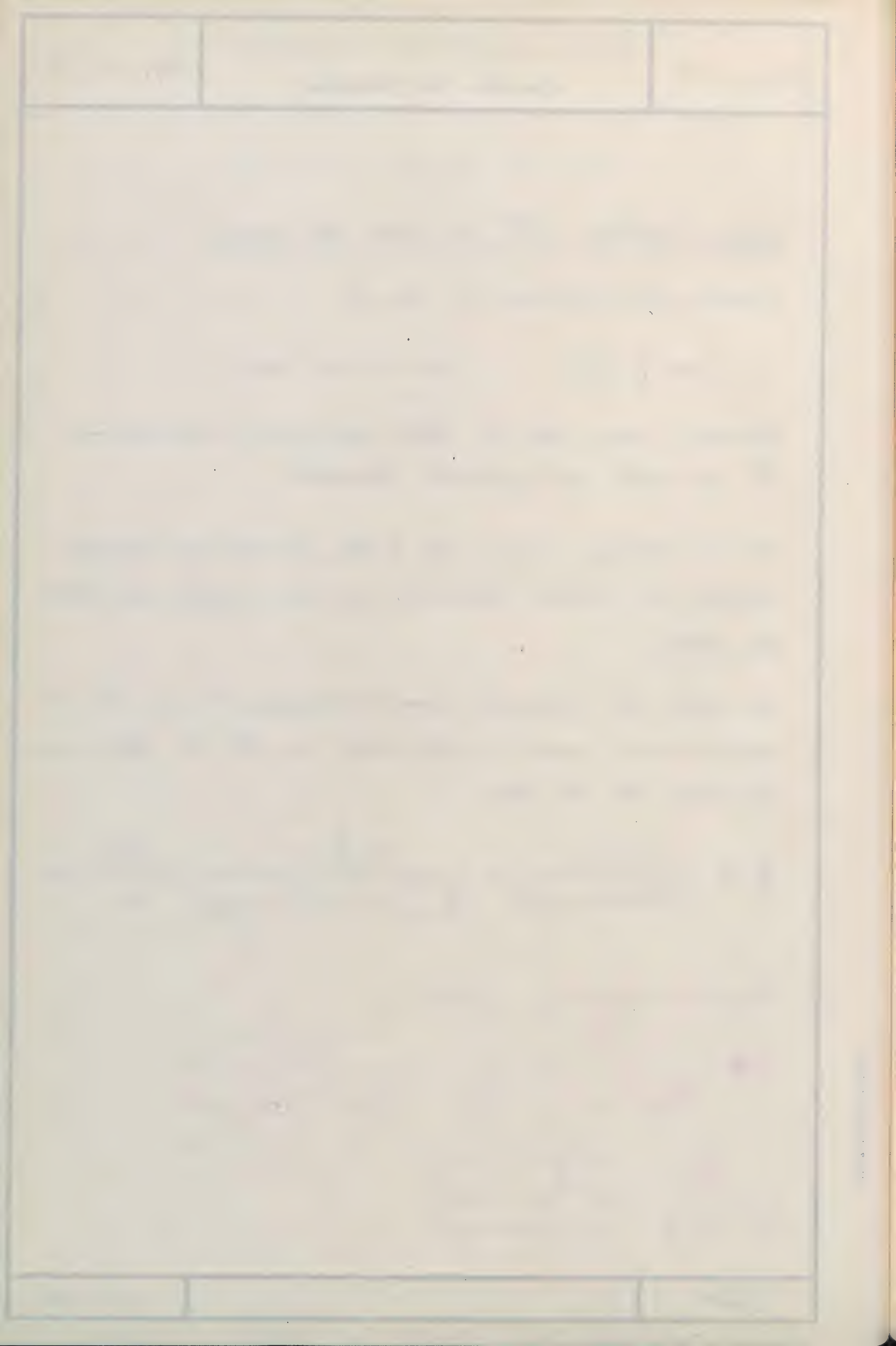
Se deduce de la fórmula general [4] obtenida anteriormente (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{a_4\ k_4}{(k_4)^2 - a_4 c_4 + (c_4)^2} = \frac{a_4 \times \frac{\sqrt{2}}{3} a_4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3} a_4\right)^2 - a_4 \times \frac{1}{3} a_4 + \left(\frac{1}{3} a_4\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}}{0} = \infty$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{a_4 \times \frac{\sqrt{2}}{3} a_4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3} a_4\right)^2 - a_4 \times \frac{1}{3} a_4 + \left(\frac{1}{3} a_4\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} (a_4)^2}{\frac{2}{9}(a_4)^2 - \frac{1}{3}(a_4)^2 + \frac{1}{9}(a_4)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = \boxed{\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{0} = \infty}$$



Del valor anterior se deduce

$$\varphi_4 = \text{arc. tg}\ \infty = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

y por consiguiente

$$2\varphi_4 = \pi = 180^\circ$$

lo que nos demuestra que las dos caras triangulares consideradas están en un mismo plano y se transforman en un rombo.

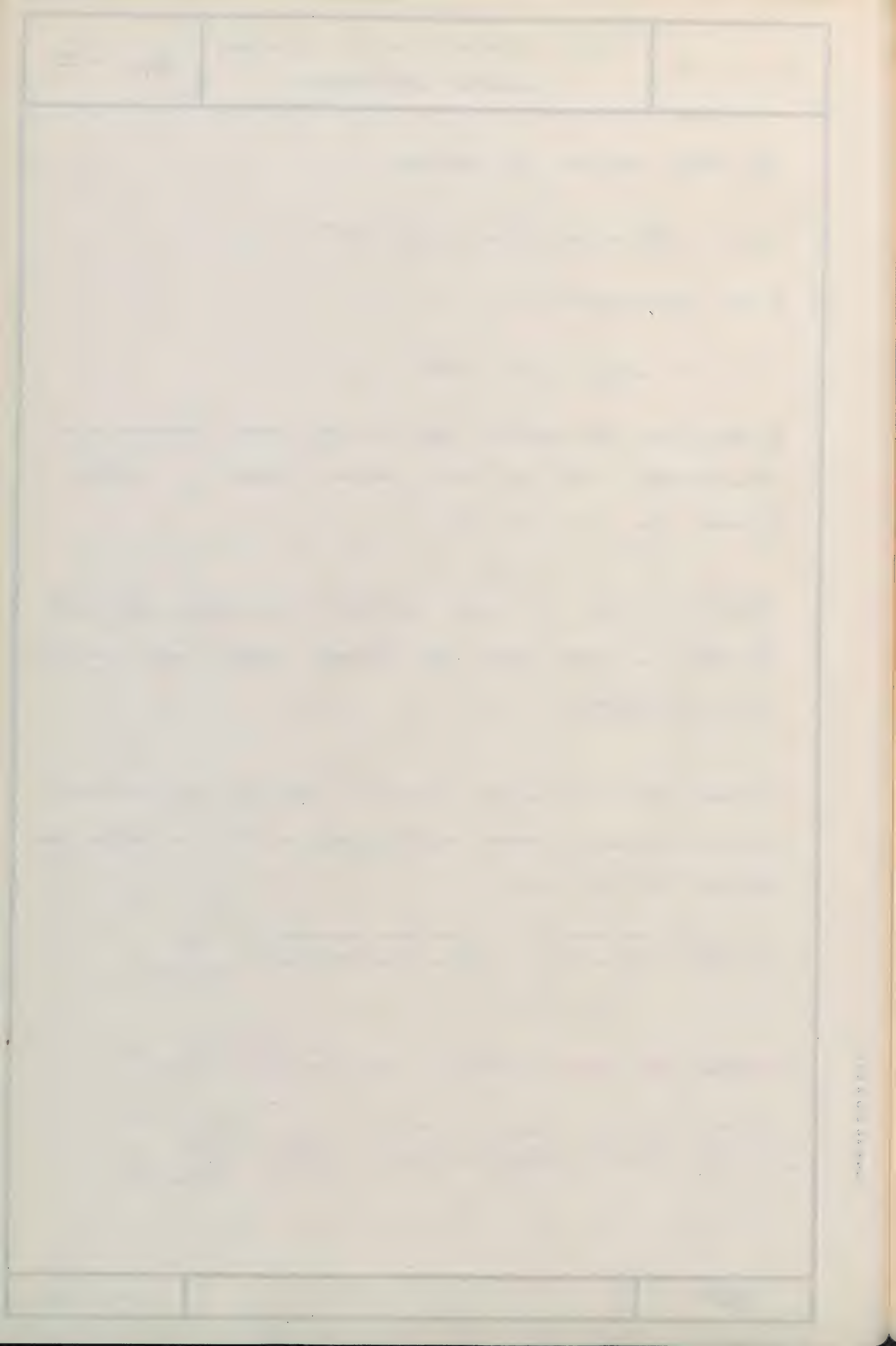
<u>Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del tetraedro dado (cara del poliedro derivado).</u>

Se deduce de la fórmula general [5] obtenida anteriormente (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$p = \sqrt{(a_4 - c_4)^2 + (k_4)^2} = \sqrt{\left(a_4 - \frac{1}{3}a_4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}a_4\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a_4$$

Desarrollo del cálculo anterior: $p = \sqrt{\left(a_4 - \frac{a_4}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}a_4\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{2a_4}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}a_4\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}(a_4)^2 + \frac{2}{9}(a_4)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}}\ a_4 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}a_4}$$



Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado

Se deduce de la fórmula general [6] obtenida anteriormente (ver consideraciones previas), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_4 - c_4)^2 + d_4^2} = \sqrt{(a_4 - \tfrac{1}{3}a_4)^2 + (\tfrac{2\sqrt{2}}{3}a_4)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_4$$

Desarrollo del cálculo anterior: $q = \sqrt{(a_4 - \tfrac{1}{3}a_4)^2 + (\tfrac{2\sqrt{2}}{3}a_4)^2} =$

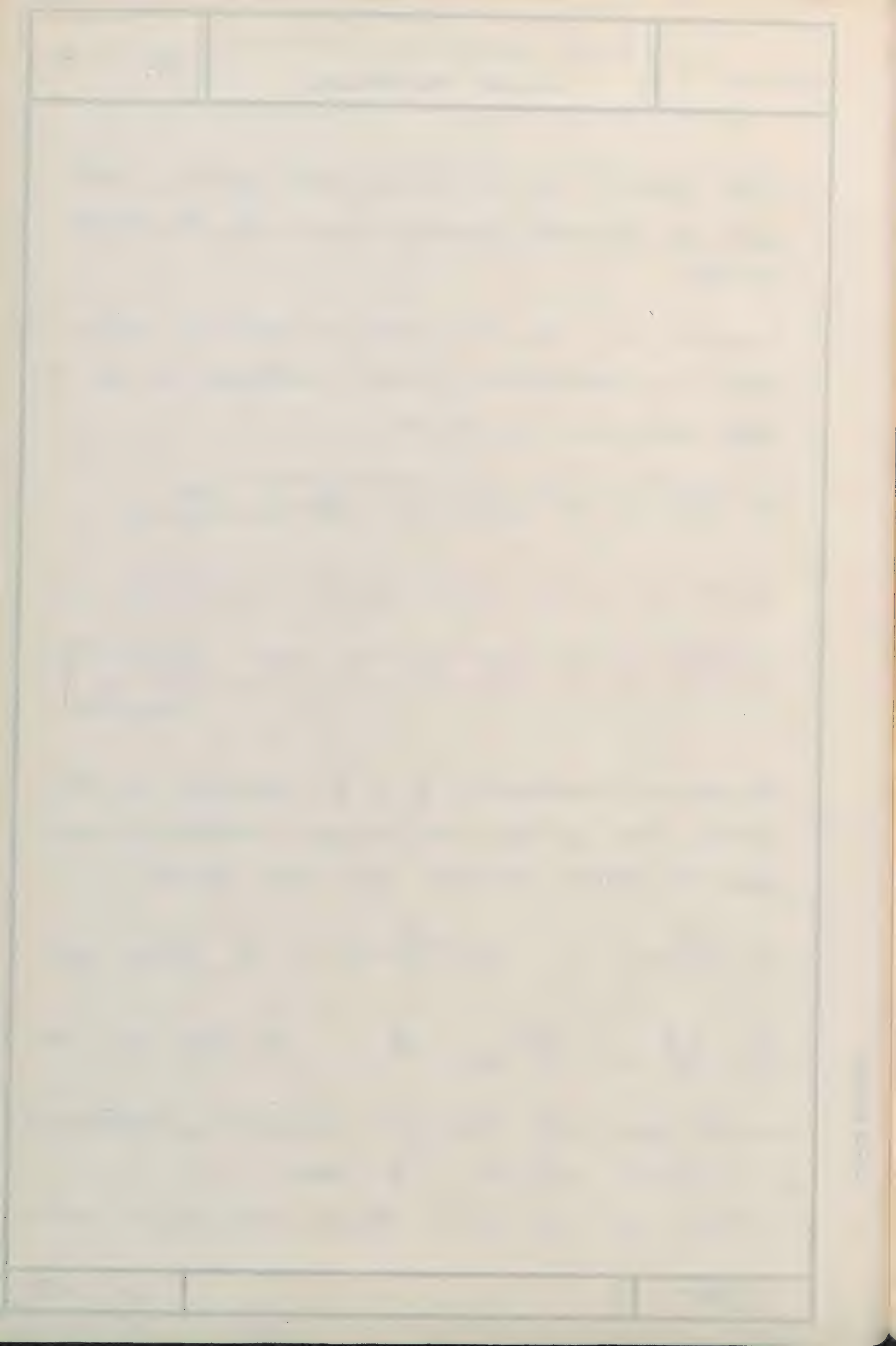
$$= \sqrt{\left(\frac{2a_4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a_4\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}a_4^2 + \frac{8}{9}a_4^2} = \sqrt{\frac{12}{9}}\,a_4 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}a_4}$$

Comparando los valores de l_4 y q, deducidos en este estudio, base y lado del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado, vemos que siendo

$l_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}a_4$ y $q = \frac{2\sqrt{3}}{3}a_4$, se deduce que

$\frac{l_4}{q} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a_4 : \frac{2\sqrt{3}}{3}a_4 = \sqrt{2}$ lo cual nos demuestra que dicho triángulo isósceles es rectángulo en el vértice opuesto a la base.

Como por otra parte hemos visto en el cálcu-



lo del ángulo "$2\varphi_4$" que dos caras triangulares de este tipo contiguas por su base, del poliedro derivado, están en un mismo plano y forman un paralelógramo de lados iguales (rombo), este paralelógramo será pues un cuadrado.

Por lo anteriormente expuesto, llegamos a la conclusión de que "el poliedro derivado del tetraedro regular", ha de tener "seis caras", todas iguales, y en forma de "cuadrados", y por consiguiente dicha figura será "un exaedro regular" (lo que demuestra lo expresado en el "Proceso gráfico").

Diagonal o lado "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del tetraedro dado

En este caso de cara triangular, será

$$t = l_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4$$

Angulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_4$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta

Se deduce de la fórmula general [7] obtenida anteriormente (ver consideraciones previas), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \gamma_4 = \frac{tq}{2\, l_4\, p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_4}{2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a_4} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} =$$



$= \frac{\sqrt{2}}{2}$; y por lo tanto: $\gamma_4 = \frac{\pi}{4} = 45°$ y $2\gamma_4 = \frac{\pi}{2} = 90°$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\operatorname{sen} \gamma_4} = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_4 \; ; \; \frac{2 \times 2\sqrt{6}}{3} a_4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

cuyo resultado nos confirma el ángulo recto que forman dos caras contiguas del exaedro regular.

<u>Angulo diedro "β_4" formado por una cara lateral de la pirámide y su base</u>

Se deduce de la fórmula general [8] (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores particulares" de este caso.

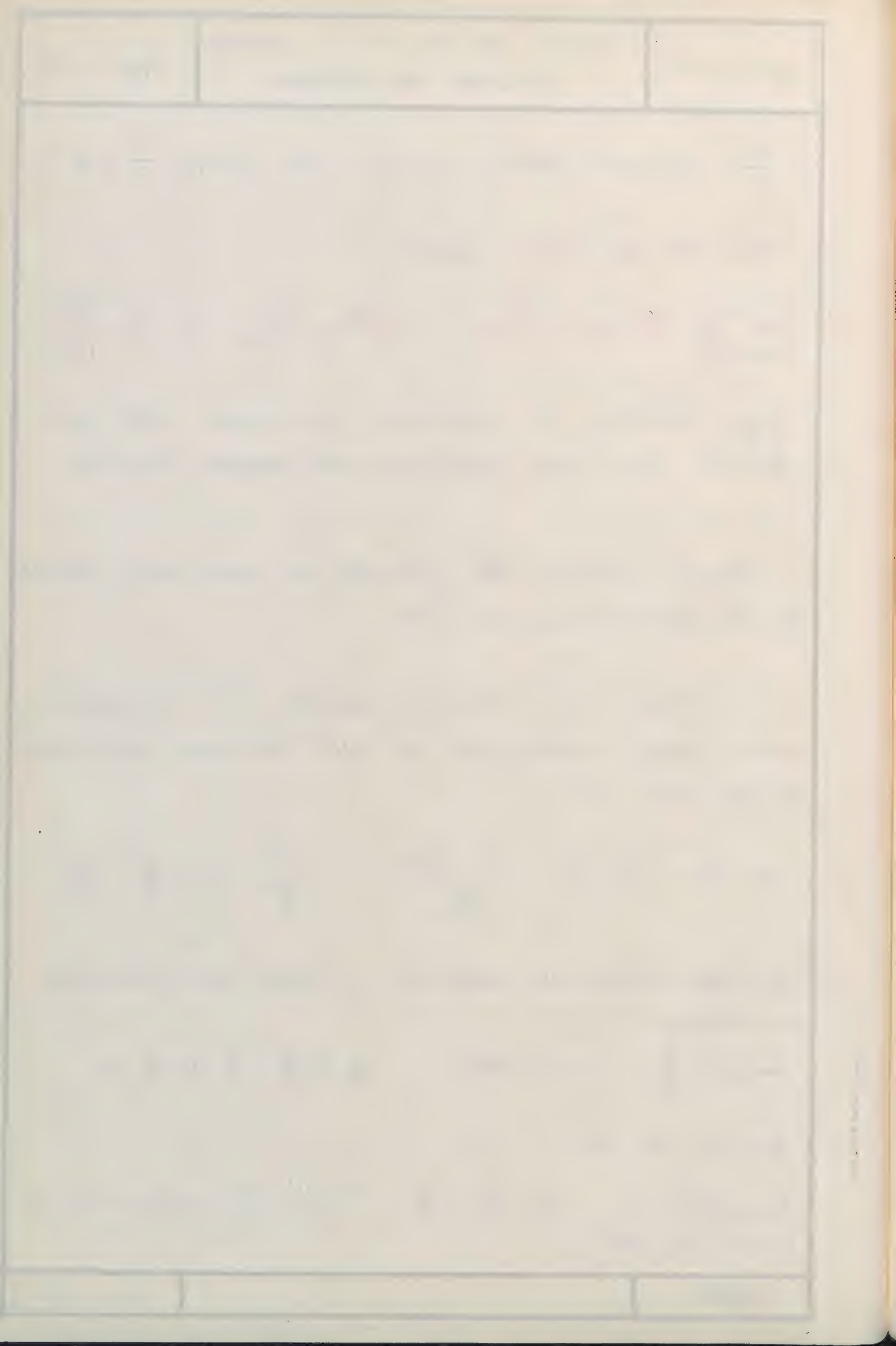
$$\operatorname{sen} \beta_4 = \frac{a_4 - C_4}{p} = \frac{a_4 - \frac{1}{3} a_4}{\frac{\sqrt{6}}{3} a_4} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

su valor numérico, expresado en grados sexagesimales, se obtiene:

$\operatorname{sen} \beta_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}81\ 64\ 96\ 6 \ldots$ $\quad \lg \operatorname{sen} \beta_4 = \bar{1}{,}911\ 95\ 44$

$\beta_4 = 54°\ 44'\ 8{,}2''$

Comprobación: $\quad \alpha_4 = \varphi_4 + \beta_4 = \frac{70°\ 31'\ 43{,}6''}{2} + 54°\ 44'\ 8{,}2'' = 90°$
(ver fórmula [11]



cuyo resultado nos confirma el cálculo directo de α_4, realizado anteriormente.

Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del tetraedro regular dado.

Se deduce de la fórmula general [9] (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_4)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_4)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a_4\right)^2 : 4} = \frac{\sqrt{6}}{3}a_4$$

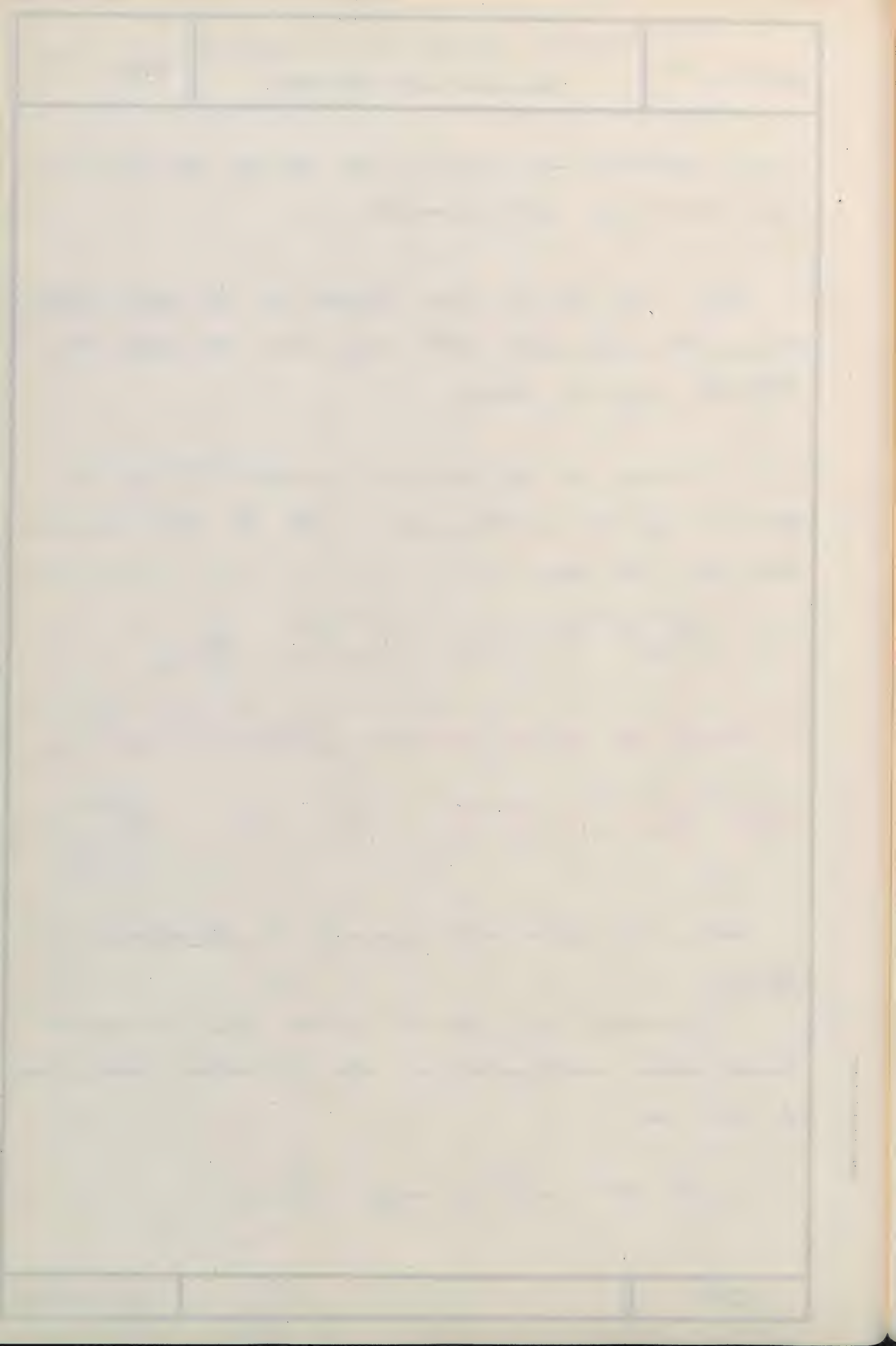
Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_2} = \sqrt{(a_4)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a_4\right)^2 : 4} =$

$$= \sqrt{(a_4)^2 - \frac{12}{9} : 4\,(a_4)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}}\,a_4 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a_4 = \sqrt{\frac{6}{9}}\,a_4 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}a_4}$$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [10] (ver consideraciones previas) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}a_4 \times \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a_4$$



Este mismo valor se puede deducir de la fórmula equivalente [10'], en la que

$$c_1 = b_2 \text{ sen } \gamma_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} a_4$$

Área lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las cuatro pirámides rectas triangulares, cuyas caras son triángulos isósceles de base "l_4" y altura "p", valores ya determinados.

$$S = 4 \times 3 \times \frac{l_4 \, p}{2} = 6 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} a_4 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a_4 = 8 (a_4)^2$$

Este valor debe ser coincidente al deducirlo de los ya obtenidos en la lám. 2, fórmulas 18 y 11, al ser $a_4 = a_6$, ya que

$$\boxed{S} = S_6 = 6 \; l_6^2 = 6 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^2 = \frac{6 \times 4}{3} (a_6)^2 = 8 (a_6)^2 = \boxed{8 (a_4)^2}$$

como así sucede efectivamente.

(sigue en hoja 27)



Volumen V del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del tetraedro dado y de las cuatro pirámides de sus caras.

$V = V_4 + 4 \times \dfrac{S_3 \times h}{3}$ siendo "S_3" el área de una cara del tetraedro y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_4 en función de a_4, ver lám. 1, fórmulas 9 y 1, que nos da

$$V_4 = \frac{\sqrt{2}}{12}(l_4)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{4}{\sqrt{6}}a_4\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27}(a_4)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_4} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(\dfrac{4}{\sqrt{6}}a_4\right)^3 =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{4^3}{6\sqrt{6}}(a_4)^3 = \frac{64}{72}\sqrt{\frac{2}{6}}(a_4)^3 = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}(a_4)^3 = \frac{8}{9\sqrt{3}}(a_4)^3 =$$

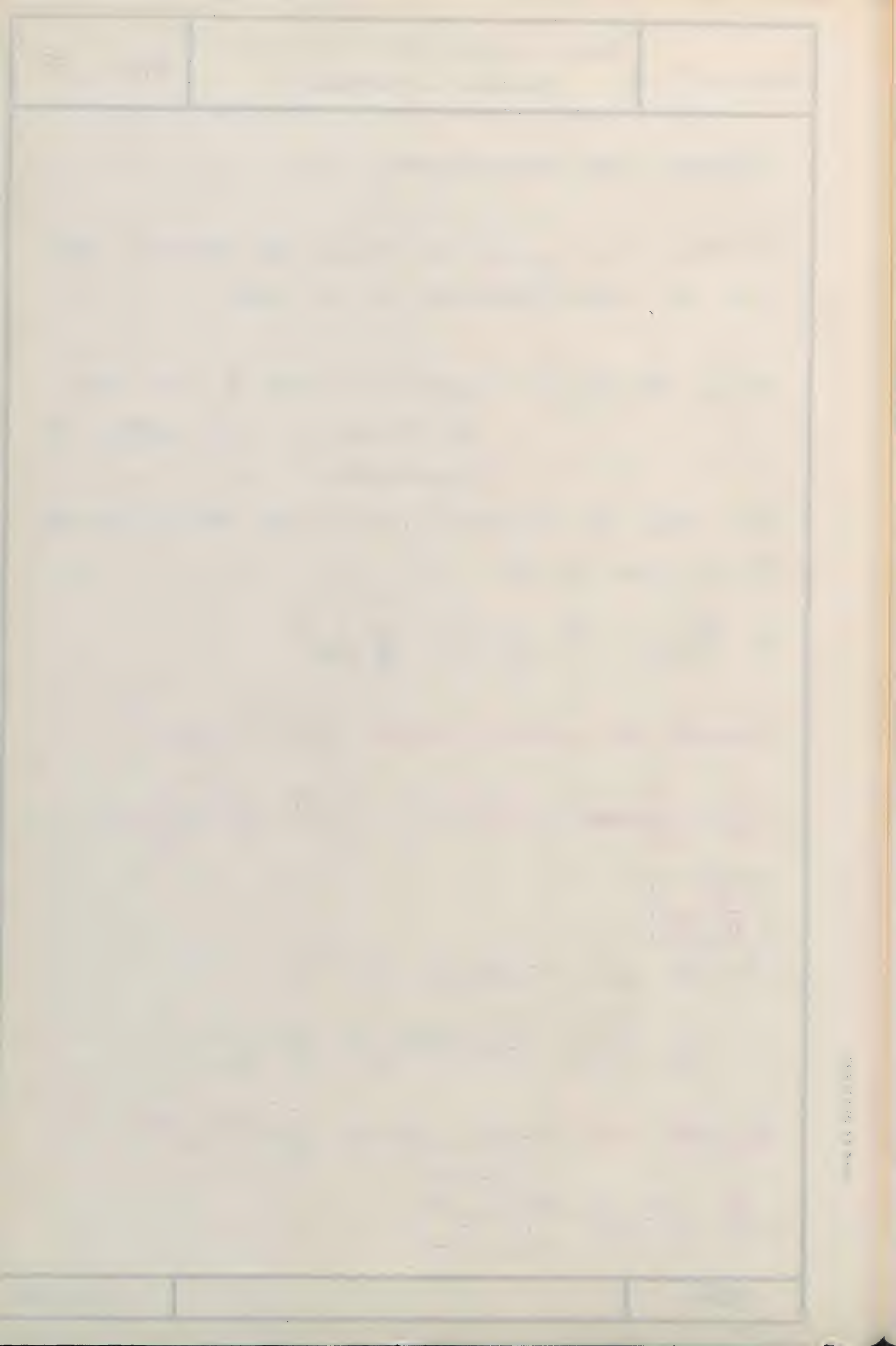
$$= \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{27}(a_4)^3}$$

Por otra parte tendremos que

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(l_4)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}a_4\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(a_4)^2$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{S_3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a_4\right)^2 =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{24}{9}(a_4)^2 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}(a_4)^2}$$



y también que (ver lám. 1, fórmulas 1 y 3)

$$h = a_4 - c_4 = a_4 - \frac{\sqrt{6}}{12} l_4 = a_4 - \frac{\sqrt{6}}{12} \times \frac{4}{\sqrt{6}} a_4 =$$

$$= a_4 - \frac{1}{3} a_4 = \frac{2}{3} a_4$$

y finalmente

$$V = V_4 + 4 \times \frac{S_3 \times h}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{27} (a_4)^3 + \frac{4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} (a_4)^2 \times \frac{2}{3} a_4}{3} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3} (a_4)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{V} = \frac{8\sqrt{3}}{27} (a_4)^3 + \frac{4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} (a_4)^2 \times \frac{2}{3} a_4}{3} = \left[\frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{4 \times 2 \times 2 \times \sqrt{3}}{27} \right] (a_4)^3 =$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{27} (a_4)^3 = \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{9} (a_4)^3}$$

Este valor debe ser coincidente al deducirlo de los ya obtenidos en la lám. 2, fórmulas 19 y 11, al ser $a_4 = a_6$, ya que

$$\boxed{V} = V_6 = (l_6)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6 \right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} (a_6)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} (a_6)^3 = \boxed{\frac{8\sqrt{3}}{9} (a_4)^3}$$

como así sucede efectivamente



En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
236 l_4	$\frac{2\sqrt{6}}{3} a_4$	$1{,}63\ 29\ 93\ldots\ a_4$
237 b_1	$\frac{\sqrt{3}}{3} a_4$	$0{,}57\ 73\ 50\ldots\ a_4$
238 b_2	$\frac{\sqrt{6}}{3} a_4$	$0{,}81\ 64\ 97\ldots\ a_4$
239 c_4	$\frac{1}{3} a_4$	$0{,}33\ 33\ 33\ldots\ a_4$
240 c_1	$\frac{\sqrt{3}}{3} a_4$	$0{,}57\ 73\ 50\ldots\ a_4$
241 d_4	$\frac{2\sqrt{2}}{3} a_4$	$0{,}94\ 28\ 09\ldots\ a_4$
242 k_4	$\frac{\sqrt{2}}{3} a_4$	$0{,}47\ 14\ 05\ldots\ a_4$
243 $2\varphi_4$	$\operatorname{sen} \varphi_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen} \varphi_4 = 0{,}57\ 73\ 50\ldots$ $2\varphi_4 = 70°\ 31'\ 43{,}6''$
244 $2\alpha_4$	$\operatorname{tg} \alpha_4 = \infty$	$2\varphi_4 = 180°$
245 $2\gamma_4$	$\operatorname{sen} \gamma_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen} \gamma_4 = 0.70\ 71\ 07$ $2\gamma_4 = 90°$
246 β_4	$\operatorname{sen} \beta_4 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\operatorname{sen} \beta_4 = 0.81\ 64\ 97$ $\beta_4 = 54°\ 44'\ 8{,}2''$
247 p	$\frac{\sqrt{6}}{3} a_4$	$0{,}81\ 64\ 97\ldots\ a_4$
248 q	$\frac{2\sqrt{3}}{3} a_4$	$1{,}15\ 47\ 01\ldots\ a_4$
249 t	$\frac{2\sqrt{6}}{3} a_4$	$1{,}63\ 29\ 93\ldots\ a_4$
250 S	$8\ (a_4)^2$	$8{,}00\ 00\ 00\ldots\ (a_4)^2$
251 V	$\frac{8\sqrt{3}}{9} (a_4)^3$	$1{,}53\ 96\ 01\ldots\ (a_4)^3$

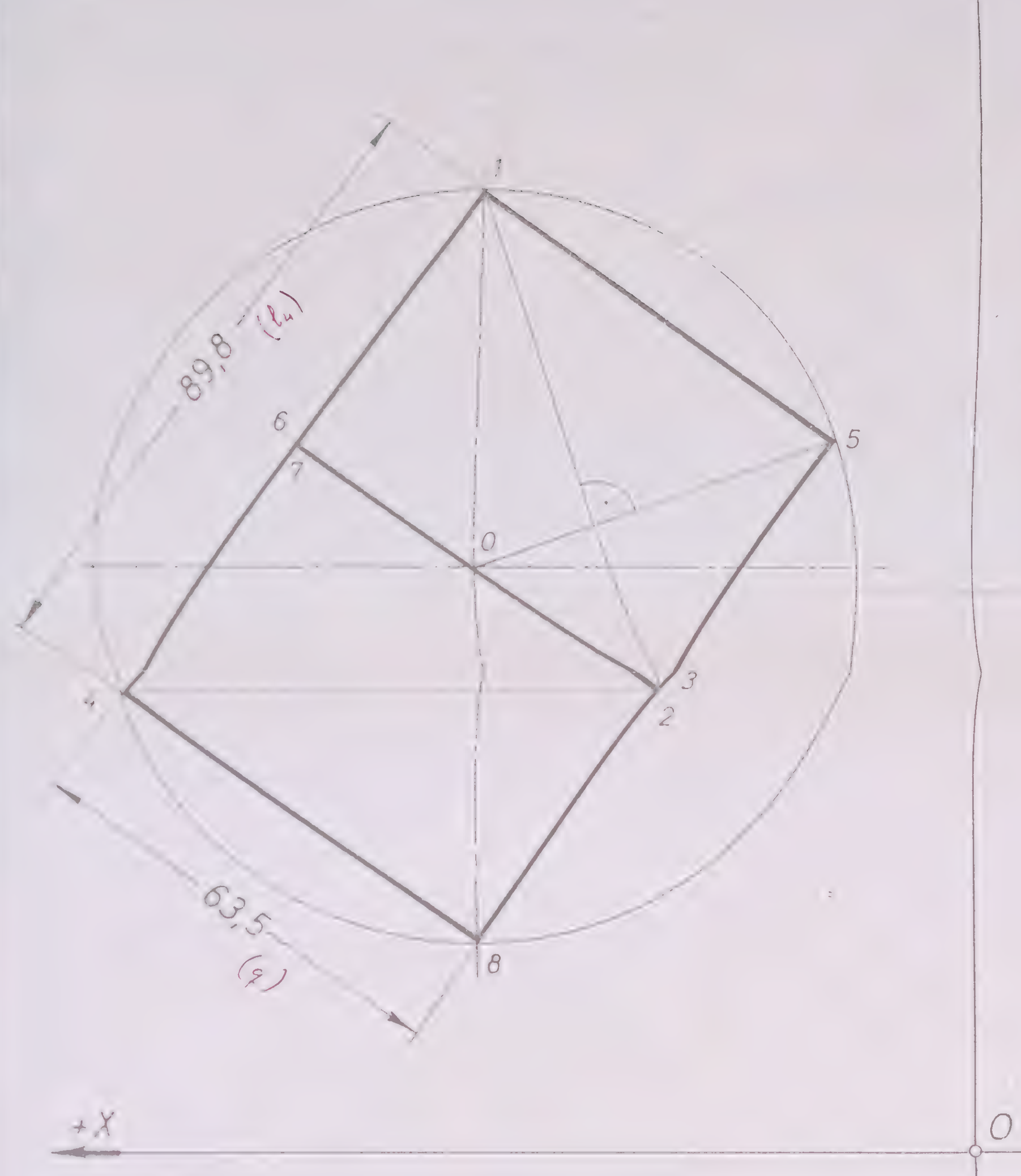
FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de seis cuadrados de 63,5 mm de lado (ver lám. 2).

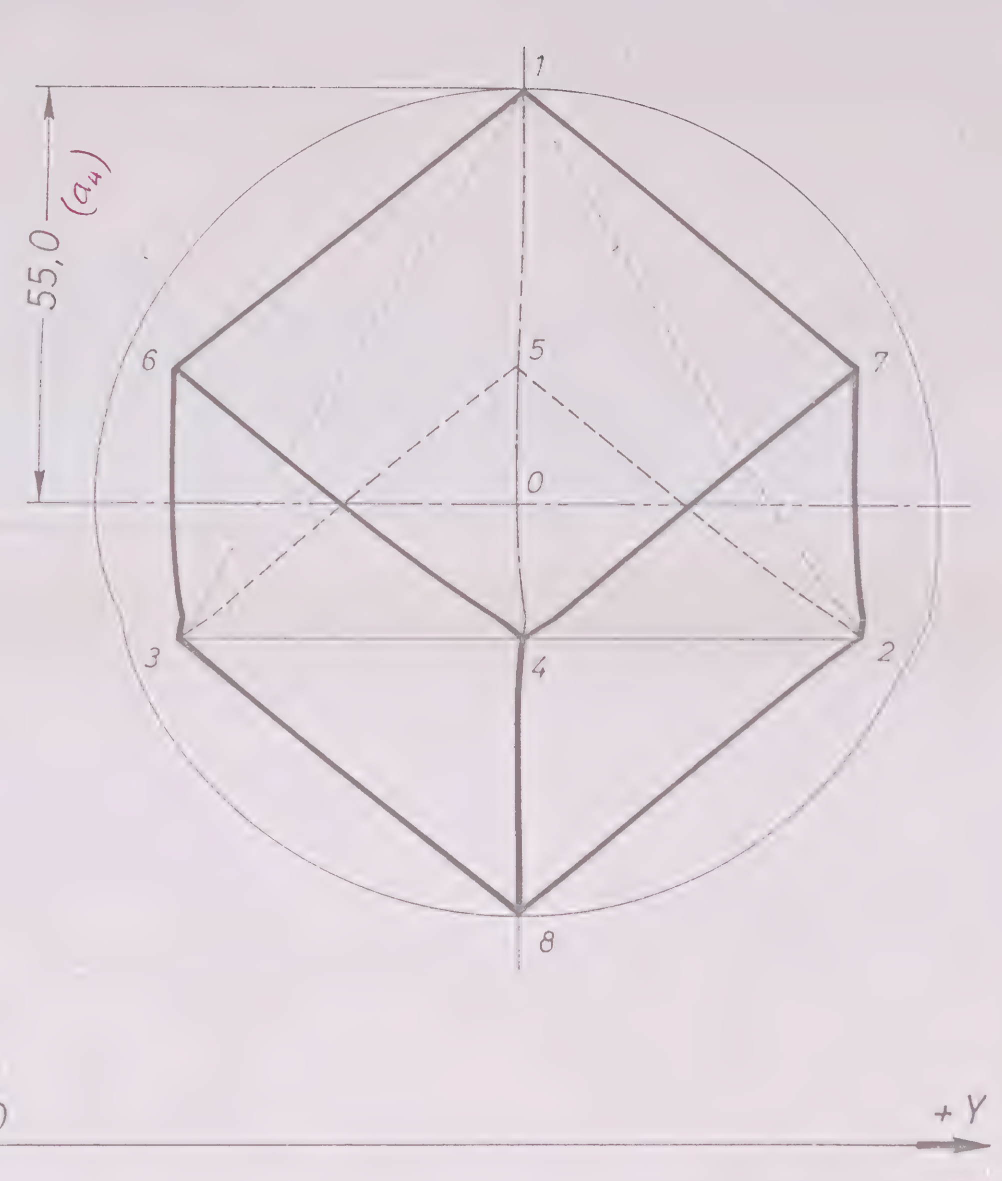
UNE A4 210 X 297



I



III



+Z

+X

O

+Y

6
3
4
5
0
1
8
7
2
51,8 (d4)

+Y

II

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el poliedro derivado de un tetraedro regular obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

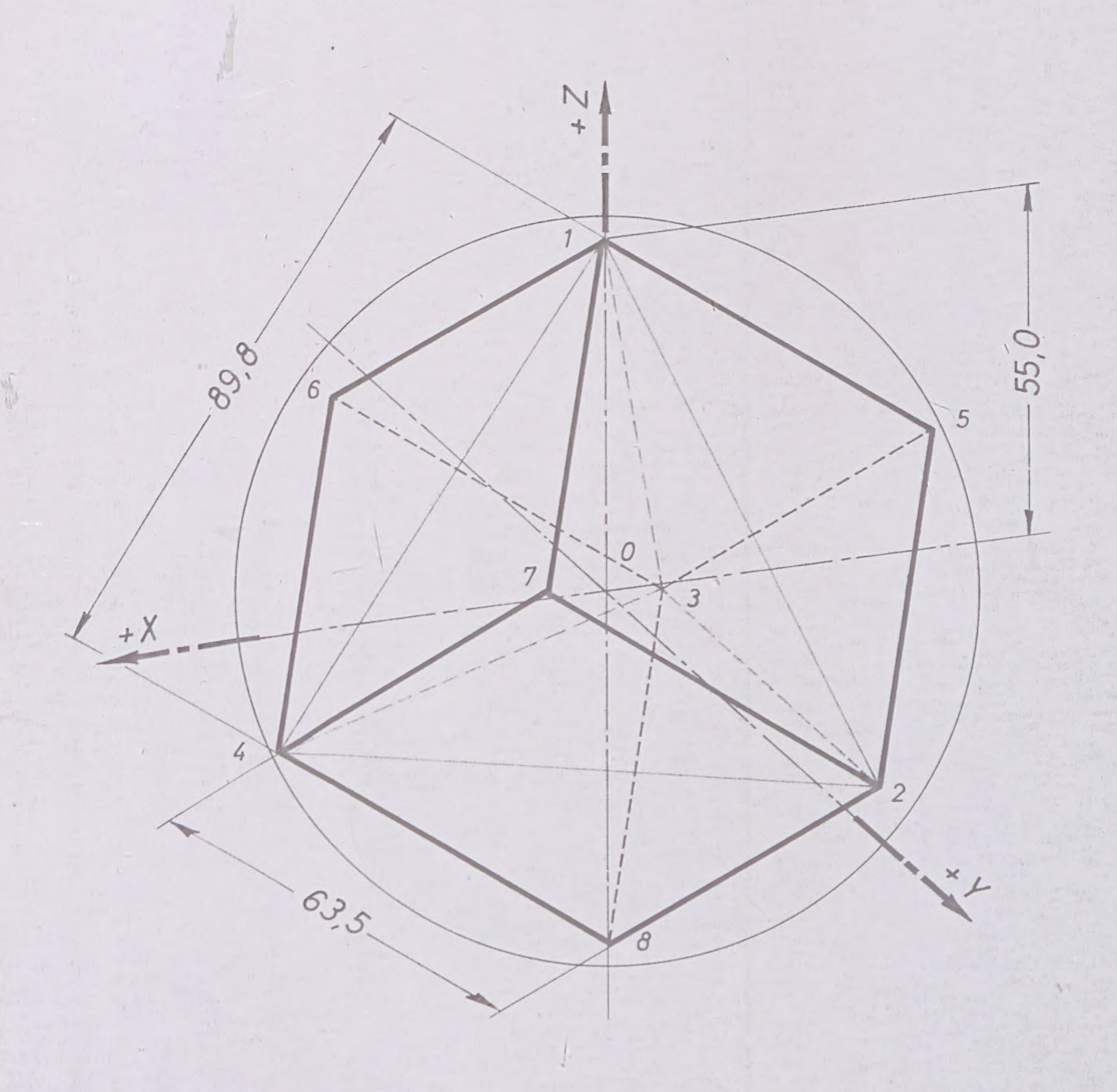
NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro........................ 1 al 4

Poliedro derivado (exaedro)...... 1 al 8

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Poliedro derivado del tetraedro regular					Lámina 25 / Curso 19 -19





Poliedro derivado del tetraedro regular

colorchecker CLASSIC

mm

calibrite